TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **12**, No. 2 (2011), 157-169.
doi: 10.5540/tema.2011.012.02.0157

As Integrais de Mellin-Barnes e a Função de Fox

F. SILVA COSTA[1], J. VAZ JR.[2], E. CAPELAS DE OLIVEIRA[3], Departamento de Matemática Aplicada – Imecc – Unicamp, 13083–859 Campinas, SP, Brasil.

R. FIGUEIREDO CAMARGO[4], Faculdade de Ciências – Unesp, 17033-360 Bauru, SP, Brasil.

Resumo. A partir do conceito de integrais de Mellin-Barnes, apresentamos a função de Fox e algumas de suas propriedades a fim de discutir a equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo.

Palavras-chave. Integral de Mellin-Barnes, função de Fox, função de Meijer, função hipergeométrica, equação do telégrafo fracionária.

1. Introdução

Chama-se função especial a toda função que, em geral, pode ser inserida numa particular classe de funções. Por exemplo, a função de Legendre é um caso particular da clássica função hipergeométrica que, por sua vez, é um caso particular da classe das funções hipergeométricas. Em completa analogia, a função de Bessel é um caso particular da função hipergeométrica confluente a qual é obtida, através de um conveniente processo de limite, a partir da clássica função hipergeométrica [3].

São várias as maneiras de se efetuar um estudo sistemático envolvendo as funções especiais das quais podemos mencionar: (a) a partir de uma função geratriz [14]; (b) utilizando relações de recorrência [32]; (c) usando a respectiva equação diferencial ordinária, quando pertinente[5], bem como (d) a partir de representações integrais [36], dentre outras. Visto que colocamos uma restrição (pertinência) podemos formular a pergunta: Existe uma maneira geral de se abordar as funções especiais?

Antes de respondermos a esta pergunta, vamos nos restringir à classe de funções especiais contendo apenas uma variável independente.[6] Agora sim, neste caso, uma maneira conveniente de abordar este estudo é através das chamadas integrais (no plano complexo) de Mellin-Barnes, conforme introduzidas, num trabalho pioneiro,

[1]pdiulfelix@hotmail.com
[2]vaz@ime.unicamp.br
[3]capelas@ime.unicamp.br
[4]rubens@fc.unesp.br
[5]Existem funções especiais que não satisfazem a uma específica equação diferencial, dentre elas, mencionamos a função H de Fox.
[6]Existem funções especiais que dependem de mais de uma variável independente, bem como de mais de um parâmetro. Apenas para citar, as funções de Lauricella pertencem a esta classe [18].

Recebido em 24 Agosto 2010; Aceito em 05 Dezembro 2010.

por Pincherle [29] e desenvolvida a teoria por Mellin e, nas aplicações, por Barnes que, por isso, hoje, justificam o nome de integrais de Mellin-Barnes.[7] Estas integrais se caracterizam por conterem no integrando, de um modo geral, um quociente entre produtos de funções gama. Como complemento à resposta da pergunta, aqui, vamos considerar a classe de funções conhecida pelo nome de função H de Fox [13]. Esta função admite um importante caso especial, a chamada função G de Meijer [27], que por sua vez congrega, obtidas como casos particulares, todas as clássicas funções especiais da Física-Matemática, dentre elas as funções hipergeométricas [17].

A fim de justificar a importância do estudo das funções de Fox e suas aplicações mencionamos alguns recentes trabalhos onde tal função emerge naturalmente, a saber: no estudo da equação de Schrödinger com potenciais tipo delta [4]; no tunelamento [5]; no estudo de espalhamento [28]; equação de difusão não Markoviana [19]; dentre outros [26].

Em resumo, vamos apresentar a função H de Fox através das integrais de Mellin-Barnes e discutir algumas propriedades a fim de, como aplicação, resolver a equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo e recuperar, como caso particular, um recente resultado [35].

Este trabalho está disposto da seguinte maneira: Na Seção 2, introduzimos as integrais de Mellin-Barnes exemplificando a sua utilidade no caso da clássica função hipergeométrica. Na Seção 3, apresentamos a função H de Fox e mencionamos apenas as propriedades que serão utilizadas no decorrer do trabalho, especificamente na Seção 5. Na Seção 4 efetuamos um resumo das preliminares envolvendo o cálculo fracionário, em particular as transformadas de Laplace e Fourier a fim de resolver, na Seção 5, o problema do telégrafo na versão fracionária, isto é, a equação diferencial parcial fracionária associada ao problema do telégrafo.

2. As Integrais de Mellin-Barnes

Em um recente artigo Mainardi-Pagnini [23] recuperaram os resultados de Pincherle [29] onde foi introduzido, pela primeira vez, a partir do chamado "princípio da dualidade", as hoje conhecidas como integrais de Mellin-Barnes[8]. Também recente é o artigo de Saxena [33], onde é apresentado um resumo da vida acadêmica de Fox, em particular como foi introduzida a função H de Fox em termos das integrais de Mellin-Barnes. Infelizmente, no artigo de Saxena não é feita nenhuma menção ao artigo de Mainardi-Pagnini, apesar de terem sido dados créditos aos trabalhos de Pincherle do ano de 1888.

Em analogia às transformadas de Laplace e de Fourier, podemos introduzir a transformada de Mellin através de um par de integrais, isto é, a transformada de Mellin direta e a respectiva transformada de Mellin inversa. No caso particular de a função a ser transformada conter uma ou mais funções gama, vamos obter

[7] De todas as integrais que contêm funções gama em seus integrandos, as mais importantes são as assim chamadas integrais de Mellin-Barnes. Tais integrais foram introduzidas por Pincherle em 1888; sua teoria foi desenvolvida, em 1910, por Mellin e foram usadas por Barnes na integração completa da equação hipergeométrica. Tradução livre [9].

[8] São dois trabalhos que constam do Volume I delle Opere Scelte, Unione Matematica Italiana, Edizioni Cremonese, páginas 223-230 e 231-239, (1954), respectivamente.

as chamadas integrais de Mellin-Barnes. Tais integrais desempenham um papel fundamental, em particular, como vamos ver na Seção 3, no estudo das funções H de Fox que, como já afirmamos, contêm, como casos particulares, todas as clássicas funções especiais da Física-Matemática e os vários tipos de funções de Mittag-Leffler e a chamada função de Wright-Fox [21], dentre outras.

Aqui, por entendermos que as transformadas integrais desempenham um papel importante quando da resolução de um problema envolvendo uma equação diferencial, ordinária ou parcial, e condições iniciais/contorno, vamos introduzir as integrais de Mellin-Barnes através de uma conveniente transformada inversa, em particular, a transformada de Mellin.

Para tal, introduzimos, na forma de um teorema, o par de transformadas de Mellin, ou seja, a transformada direta e a respectiva transformada inversa.

Teorema 2.1 (Transformada de Mellin)**.** *Considere $f(x)$ uma função tal que a integral $\int_0^\infty x^{k-1}|f(x)|\mathrm{d}x$ seja limitada para algum $k > 0$. Se a transformada de Mellin é dada pela integral*

$$\mathfrak{M}[f(x)] \equiv F(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\mathrm{d}x,$$

então a transformada de Mellin inversa é dada por [34]

$$\mathfrak{M}^{-1}[F(s)] \equiv f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+\infty} F(s)x^{-s}\mathrm{d}s,$$

onde $c > k$.

Chama-se integral de Mellin-Barnes a toda integral no plano complexo cujo integrando contempla pelo menos uma função gama. Convém ressaltar que Pincherle [29] obteve a seguinte fórmula

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(x-\rho_i)}{\prod_{i=1}^{m-1}\Gamma(x-\sigma_i)}\,\mathrm{e}^{xt}\mathrm{d}x$$

com $a > \mathrm{Re}\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\}$, cuja convergência foi provada usando uma fórmula assintótica para a função gama. Esta integral pode ser considerada como o primeiro exemplo na literatura do que é hoje conhecido com o nome de integral de Mellin-Barnes [23].

2.1. Função Hipergeométrica

A fim de exemplificarmos o cálculo explícito de uma transformada de Mellin, vamos obter a transformada de Mellin da função hipergeométrica, ou seja, calcular a seguinte integral

$$\mathfrak{M}[{}_2F_1(a,b;c;-x)] = \int_0^\infty x^{s-1}{}_2F_1(a,b;c;-x)\mathrm{d}x,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Para calcular esta integral, utilizamos a representação integral devida a Euler, já invertendo a ordem das integrações, de modo a obtermos

$$\mathfrak{M}[{}_2F_1(a,b;c;-x)] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \xi^{b-1}(1-\xi)^{c-b-1}\mathrm{d}\xi \cdot \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(1+\xi x)^a}\mathrm{d}x.$$

Primeiramente, introduzimos a mudança de variável $x = (1-t)/t\xi$ cuja integral na variável t é dada em termos de uma função beta. Enfim, novamente utilizando a definição da função beta para integrar na variável ξ, obtemos

$$\mathfrak{M}[{}_2F_1(a,b;c;-x)] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-s)},$$

para $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\mathrm{Re}(a-s) > 0$, $\mathrm{Re}(b-s) > 0$ e $\mathrm{Re}(c-s) > 0$.

A partir do teorema envolvendo o par de transformadas de Mellin podemos escrever a respectiva transformada de Mellin inversa

$$\mathfrak{M}^{-1}\left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-s)}\right] = {}_2F_1(a,b;c;-x).$$

Enfim, introduzindo a integral da transformada inversa podemos escrever a seguinte representação integral, no plano complexo, para a clássica função hipergeométrica

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}(-z)^{-s}\mathrm{d}s,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $\min\{\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(b)\} > \gamma > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ e $|\arg(-z)| < \pi$. O caminho de integração é tal que os pólos em $s = a+n$ e $s = b+n$ estejam separados daqueles em $s = -n$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$

Esta representação integral para a clássica função hipergeométrica, nada mais é que uma integral do tipo Mellin-Barnes.

3. Função H de Fox

A função H, conforme introduzida por Fox em 1961 [13], é uma função especial que contempla, como casos particulares, várias funções especiais da Física-Matemática e que permite tratar diferentes problemas de maneira unificada. Apenas para mencionar, problemas envolvendo difusão anômala [11, 12, 23] e problemas advindos da física de partículas elementares [1] são tratados via função H de Fox.

Existem compêndios onde a função H de Fox é abordada, em particular, mencionamos o artigo [24] e os livros [16, 25] porém não é unanimidade a maneira de introduzi-la no sentido de considerarmos, ou não, a transformada de Mellin, conforme anteriormente mencionado.

Neste trabalho, como já afirmamos, vamos introduzir a função H de Fox através de uma integral de Mellin-Barnes de modo que podemos, quando necessário, interpretá-la como uma transformada de Mellin inversa.

Consideramos os inteiros m, n, p, q de modo que $0 \leq n \leq p$ e $1 \leq m \leq q$ e os parâmetros $a_\ell, b_j \in \mathbb{C}$ e $A_\ell, B_j \in \mathbb{R}_+$ para $\ell = 1, \ldots, p$ e $j = 1, \ldots, q$. Definimos a função $H \equiv H(z)$ de Fox a partir da seguinte integral de Mellin-Barnes

$$H(z) \equiv H^{m,n}_{p,q}(z) = H^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_\ell, A_\ell)_{1,p} \\ (b_j, B_j)_{1,q} \end{matrix} \right] =$$

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_1, A_1), \ldots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \ldots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}(s)\, z^{-s}\, \mathrm{d}s, \tag{3.1}$$

onde

$$\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}(s) = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{\ell=1}^{n} \Gamma(1 - a_\ell - A_\ell s)}{\displaystyle\prod_{\ell=n+1}^{p} \Gamma(a_\ell + A_\ell s) \prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j - B_j s)}.$$

O contorno $\mathcal{L}$ na Eq.(3.1) pode ser escolhido de três maneiras distintas [16] porém para todas elas devemos impor que os pólos

$$\begin{aligned} b_{j\ell} &= -\frac{b_j + \ell}{B_j} \qquad \text{com} \quad j = 1, \ldots, m\,; \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \\ a_{rk} &= \frac{1 - a_r + k}{A_r} \qquad \text{com} \quad r = 1, \ldots, n\,; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

não coincidam, isto é, os parâmetros complexos a_i e b_i são tomados com a imposição de que nenhum pólo do integrando venha a coincidir. O contorno dispõe todos os pólos em $s = b_{j\ell}$ à esquerda e todos os pólos $s = a_{rk}$ à direita de $\mathcal{L}$ [16]. Nos casos em que $n = 0$, $m = q$ e $n = p$, devemos interpretar os produtórios como sendo 1.

No particular caso em que $A_\ell = 1 = B_j$, para todo j e ℓ, recuperamos a chamada função G de Meijer [27], isto é,

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_\ell, 1)_{1,p} \\ (b_j, 1)_{1,q} \end{matrix} \right] \equiv G^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_\ell)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right].$$

Braaksma [2] mostrou que, independentemente da escolha do contorno, a integral de Mellin-Barnes faz sentido e define uma função analítica na variável z nos dois casos a seguir:

$$\mu > 0, \quad 0 < |z| < \infty \quad \text{onde} \quad \mu = \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j$$

e

$$\mu = 0, \quad 0 < |z| < \delta \quad \text{onde} \quad \delta = \prod_{j=1}^{p} A_j^{-A_j} \cdot \prod_{j=1}^{q} B_j^{B_j}.$$

3.1. Propriedades

Como já mencionamos, vamos apresentar apenas as propriedades envolvendo a função H de Fox que serão utilizadas na Seção 5.

P.1. Mudança na variável independente

Seja c uma constante positiva. Temos

$$H_{p,q}^{m,n}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p, A_p)\\(b_q, B_q)\end{matrix}\right) = c\,H_{p,q}^{m,n}\left(x^c\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p, c\,A_p)\\(b_q, c\,B_q)\end{matrix}\right).$$

Para mostrar esta igualdade, basta introduzir a mudança de variável $s \to c\,s$ na integral da transformada de Mellin inversa.

P.2. Mudança do primeiro argumento

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então podemos escrever

$$x^\alpha H_{p,q}^{m,n}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p, A_p)\\(b_q, B_q)\end{matrix}\right) = H_{p,q}^{m,n}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p+\alpha A_p, A_p)\\(b_q+\alpha B_q, B_q)\end{matrix}\right).$$

Para mostrar esta igualdade, introduzimos a mudança de variável $a_p \to a_p + \alpha A_p$ e tomamos $s \to s - \alpha$ na integral da transformada de Mellin inversa.

P.3. Redução de ordem

Se o primeiro fator (a_1, A_1) é igual ao último, (b_q, B_q), temos

$$H_{p,q}^{m,n}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1, A_1),\dots,(a_p, A_p)\\(b_1, B_1),\dots,(b_{q-1}, B_{q-1})(a_1, A_1)\end{matrix}\right) =$$

$$= H_{p-1,q-1}^{m,n-1}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_2, A_2),\dots,(a_p, A_p)\\(b_1, B_1),\dots,(b_{q-1}, B_{q-1})\end{matrix}\right).$$

Para mostrar esta identidade é suficiente simplificar os argumentos comuns na integral de Mellin-Barnes.

4. Cálculo Fracionário

O cálculo fracionário é uma das ferramentas mais precisas para se refinar a descrição de fenômenos naturais. Uma maneira bastante comum de se utilizar esta ferramenta é substituir a derivada de ordem inteira de uma equação diferencial parcial, que descreve um determinado fenômeno, por uma derivada de ordem não inteira. Vários resultados importantes e generalizações foram obtidos através desta técnica, em diversas áreas do conhecimento, tais como: mecânica dos fluidos, fenômenos de transporte, redes elétricas, probabilidade, biomatemática, dentre outros [8].

Para resolver a equação diferencial parcial fracionária, utilizamos a metodologia da justaposição de transformadas, ou seja, aplicamos a transformada de Fourier na parte espacial e a transformada de Laplace para eliminar a dependência temporal. Sendo assim, nesta seção apresentamos a chamada derivada fracionária no sentido de Caputo [6], bem como suas transformadas de Laplace e Fourier. Além disso, recuperamos alguns resultados envolvendo as funções de Mittag-Leffler [21].

4.1. Derivada de Ordem Não Inteira

Há várias formas de se introduzir a derivada de ordem não inteira como uma generalização para a derivada de ordem inteira, dentre elas podemos citar a definição de Riemann-Liouville, que é a mais conhecida e a de Caputo, que é mais restritiva, mas parece ser mais adequada para o estudo de problemas físicos [10]. A derivada de ordem μ no sentido de Caputo é definida da seguinte maneira [6]

$$\mathsf{D}_t^\mu f(t,x) \equiv \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\mu)} \displaystyle\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau,x)}{(t-\tau)^{\mu+1-n}} \mathrm{d}\tau\,, & n-1<\mu<n\,, \\ f^{(n)}(t,x)\,, & \mu \equiv n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

na qual $f^{(n)}(t,x)$ denota a derivada usual de ordem n em relação à variável t.

Deste ponto em diante, consideramos o limite inferior a como sendo $-\infty$ na parte espacial e zero na parte temporal. O primeiro e segundo casos estão associados, respectivamente, às transformadas de Fourier e de Laplace [20].

Sendo s, com $\mathrm{Re}(s) > 0$, o parâmetro da transformada de Laplace temos [30]

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} f(t,x)\right\} = s^\mu F(s,x) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\mu-1-k} f^{(k)}(0^+,x)$$

com $n-1 < \mu \leq n$ e $n \in \mathbb{N}$. Nesta equação, $F(s,x)$ denota a transformada de Laplace de $f(t,x)$. Além disso, sendo ω o parâmetro da transformada de Fourier podemos escrever para a derivada fracionária de Caputo

$$\mathfrak{F}\{\mathsf{D}_x^\mu f(t,x)\} = |\omega|^{2\mu} F(t,\omega),$$

na qual $F(t,\omega)$ é a transformada de Fourier da função $f(t,x)$.

Enquanto a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo depende de condições iniciais que possuem uma imediata interpretação física, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville depende de condições dadas em termos de ${}_a\mathsf{D}_t^{\mu-k-1} f(t)|_{t=0}$. Outra importante diferença entre estas duas abordagens é que a derivada fracionária de Caputo de uma constante é zero, o que não ocorre com a definição de Riemann-Liouville.[9]

4.2. Funções de Mittag-Leffler

Nesta seção introduzimos a clássica função de Mittag-Leffler, denotada por $E_\alpha(x)$, bem como a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, denotada por $E_{\alpha,\beta}(x)$, a

[9] Note que desta forma a derivada segundo Riemann-Liouville não pode ser interpretada como a taxa de variação. Isto justifica a utilização da derivada de Caputo e não a de Riemann-Liouville, quando estamos interessados em resolver uma equação diferencial parcial fracionária.

partir da função de Mittag-Leffler com três parâmetros, também conhecida como função de Mittag-Leffler generalizada, proposta por Prabhakar [31], isto é,

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} \frac{z^k}{k!} \equiv \frac{1}{\Gamma(\rho)} H^{1,1}_{1,2}\left(-z \,\middle|\, \begin{matrix} (1-\rho,1) \\ (0,1),(1-\beta,\alpha) \end{matrix}\right)$$

na qual $(\rho)_k$ é o símbolo de Pochhammer,

$$(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)} \equiv \rho(\rho+1)\cdots(\rho+k-1)$$

e $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Esta função generaliza a função de Mittag-Leffler clássica e também a de dois parâmetros [22], pois

$$E^{1}_{\alpha,1}(x) = E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)} \qquad \text{e} \qquad E^{1}_{\alpha,\beta}(x) = E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)},$$

consequentemente para $\alpha, \beta, \rho = 1$ temos $E^{1}_{1,1}(x) = \mathrm{e}^x$.

Podemos escrever a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler com três parâmetros [16], ou seja,

$$\mathfrak{L}\left[t^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(\pm\lambda t^{\alpha})\right] = \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^{\alpha} \mp \lambda)^{\rho}}$$

cuja transformada inversa pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^{\alpha} \mp \lambda)^{\rho}}\right] = t^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(\pm\lambda\, t^{\alpha}),$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$.

Por conveniência, no que se segue, vamos introduzir a seguinte função do tipo Mittag-Leffler

$$\mathcal{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(t, y, \gamma) \equiv t^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta}(-\mathcal{K}|y|^{\gamma} t^{\alpha}), \tag{4.1}$$

satisfazendo $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mathcal{K}$ é uma constante positiva e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Aqui, associamos a variável t como sendo o tempo enquanto que a variável y como sendo a variável espacial. Note-se que, no caso em que $\rho = 1$, recuperamos os recentes resultados obtidos por Yu & Zhang [35].

5. A Equação do Telégrafo Fracionária

Como aplicação, discutimos a equação do telégrafo fracionária no caso tridimensional, isto é, a dimensão espacial igual a três.

A equação diferencial parcial fracionária a ser estudada é

$$a\mathsf{D}^{2\alpha}_t u + b\mathsf{D}^{\beta}_t u = -\mathcal{K}(-\Delta)^{\gamma} u, \quad t > 0; \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{5.1}$$

com $\mathsf{D} \equiv \partial/\partial t$, $1/2 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$ e $0 < \gamma \leq 1$, com $u = u(t, x; \alpha, \beta, \gamma)$ e $x = x(x_1, x_2, x_3)$. Aqui $(-\Delta)^{\gamma}$ denota o operador de Laplace fracionário [7].

$a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{K}$ uma constante física real, t é a variável temporal e x é a variável espacial. No caso em que $\alpha = \beta = \gamma = 1$ recuperamos a clássica equação do telégrafo. Assim a Eq.(5.1) pode ser considerada como uma generalização da clássica equação do telégrafo. Aqui, não estamos preocupados com as unidades físicas [15].

Admitamos as seguintes condições iniciais e de contorno

$$\lim_{|x|\to\infty} u(t,x;\alpha,\beta,\gamma) = 0 \quad \text{e} \quad \mathsf{D}_t^k u(t,x;\alpha,\beta,\gamma) = f_k(x),$$

respectivamente, para $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Enfim, consideremos a derivada fracionária temporal no sentido de Caputoa derivada espacial fracionária é no sentido de Riesz e usamos a relação [7]

$$\mathfrak{F}\left[(-\Delta)^{\gamma} u(t,x;\alpha,\beta,\gamma);\omega\right] = |\omega|^{2\gamma} \mathfrak{F}\left[u(t,x;\alpha,\beta,\gamma);\omega\right],$$

onde ω é o parâmetro associado à transformada de Fourier, de onde obtemos uma outra equação diferencial fracionária

$$a\mathsf{D}_t^{2\alpha}\widehat{u} + b\mathsf{D}_t^{\beta}\widehat{u} = -\mathcal{K}|\omega|^{2\gamma}\widehat{u} \tag{5.2}$$

satisfazendo as condições iniciais $\mathsf{D}_t^k \widehat{u}(t,\omega,\alpha,\beta,\gamma) = F_k(\omega)$ com $k = 0, 1, \ldots, m-1$, onde $\widehat{u} = \widehat{u}(t,\omega;\alpha,\beta,\gamma)$ é a transformada de Fourier de $u = u(t,x;\alpha,\beta,\gamma)$ e $F_k(\omega)$ é a transformada de Fourier de $f_k(x)$.

Como já afirmamos, consideramos apenas o caso $n = 3$. Então, tomando a transformada de Laplace da Eq.(5.2) e usando as condições iniciais, obtemos uma equação algébrica cuja solução é dada por

$$\widehat{u}(p,\omega;\alpha,\beta,\gamma) = F_0(\omega)\frac{a\,p^{2\alpha-1} + b\,p^{\beta-1}}{a\,p^{2\alpha} + b\,p^{\beta} + \mathcal{K}|\omega|^{2\gamma}},$$

onde p é o parâmetro da transformada de Laplace e $\widehat{u}(p,\omega;\alpha,\beta,\gamma)$ é a justaposição da transformada inversa de $u(t,x;\alpha,\beta,\gamma)$. Para obter a última expressão usamos as condições

$$u(0,x;\alpha,\beta,\gamma) = f_0(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{u}(0,\omega;\alpha,\beta,\gamma) = F_0(\omega)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x;\alpha,\beta,\gamma)\bigg|_{t=0} = f_1(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(t,\omega;\alpha,\beta,\gamma)\bigg|_{t=0} = F_1(\omega) = 0.$$

Assim, devemos proceder com a inversão. Tomando a correspondente transformada de Laplace inversa, podemos escrever [11]

$$\begin{aligned}\widehat{u}(t,\omega;\alpha,\beta,\gamma) &= F_0(\omega)\sum_{r=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^r t^{(2\alpha-\beta)r} E_{2\alpha,(2\alpha-\beta)r+1}^{r+1}\left(-\frac{\mathcal{K}}{a}|\omega|^{2\gamma}t^{2\alpha}\right) \\ &+\frac{b}{a}F_0(\omega)\sum_{r=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^r t^{(2\alpha-\beta)(r+1)} E_{2\alpha,(2\alpha-\beta)(r+1)+1}^{r+1}\left(-\frac{\mathcal{K}}{a}|\omega|^{2\gamma}t^{2\alpha}\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > 1/2$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\alpha > \beta$, $|b\, s^\beta/(a\, s^\alpha + \mathcal{K}|\omega|^{2\gamma})| < 1$ e $E^\gamma_{\alpha,\beta}(z)$ é a função de Mittag-Leffler generalizada.

Usando a Eq.(4.1) podemos reescrever a Eq.(5.3) na forma

$$\widehat{u}(t,\omega;\alpha,\beta,\gamma) = F_0(\omega) \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^r \left\{ \mathcal{E}^{r+1}_{2\alpha,\mu r+1}(t,\omega;\gamma) + \frac{b}{a} \mathcal{E}^{r+1}_{2\alpha,\mu(r+1)+1}(t,\omega;\gamma) \right\},$$

onde definimos o parâmetro $\mu = 2\alpha - \beta$.

Para calcular a respectiva transformada de Fourier inversa, levamos em conta o teorema de convolução, logo,

$$u(t,x;\alpha,\beta,\gamma) \equiv \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{u}(t,\omega;\alpha,\beta,\gamma);\omega] = \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^r \int_{\mathbb{R}^3} F_0(\xi)\mathcal{G}(t;x-\xi)\mathrm{d}\xi,$$

onde a função $\mathcal{G}(t,x)$, como no caso inteiro, é conhecida como solução fundamental, que é dada por

$$\mathcal{G}(t;x) = \widehat{\mathcal{E}}^{r+1}_{2\alpha,\mu r+1}(t,x;\gamma) + \frac{b}{a} \widehat{\mathcal{E}}^{r+1}_{2\alpha,\mu(r+1)+1}(t,x;\gamma),$$

a qual pode ser escrita em termos da função H de Fox, como abaixo

$$u(t,x;\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}|x|)^3} \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^r \frac{t^{\mu r}}{r!} \int_{\mathbb{R}^3} F_0(\xi) \mathfrak{H}^{2,1}_{2,3}(x-\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}^{2,1}_{2,3}(x) \quad = \quad & H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^{2\gamma}}{2^{2\gamma}\mathcal{K}t^{2\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix} (1,1), (\mu r+1, 2\alpha) \\ (r+1,1), (\frac{3}{2},\gamma), (1,\gamma) \end{matrix} \right) \\ + \quad & \frac{b}{a} t^\mu H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^{2\gamma}}{2^{2\gamma}\mathcal{K}t^{2\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix} (1,1), [\mu(r+1)+1, 2\alpha] \\ (r+1,1), (\frac{3}{2},\gamma), (1,\gamma) \end{matrix} \right), \end{aligned}$$

com $\mu = 2\alpha - \beta$.

6. Conclusões

A partir do conceito de integrais de Mellin-Barnes, introduzimos a função H de Fox e apresentamos algumas de suas propriedades. Como caso particular da função H de Fox, mencionamos a função de Mittag-Leffler. Como uma aplicação discutimos a equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo utilizando a definição da derivada fracionária no sentido de Caputo. A solução desta equação diferencial fracionária foi apresentada em termos de uma função H de Fox.

Agradecimentos

Somos gratos ao referee pelas sugestões que contribuíram para a melhora do texto.

Abstract. Using the concept of Mellin-Barnes integral, we present the Fox's H-function and discuss some of them properties to discuss the so-called fractional telegraph equation, i.e., the fractional partial differential equation associated with the telegraph problem, whose solution was presented in terms of the Fox's H-function.

Referências

[1] R.F. Ávila, M.J. Menon, Eikonal zeros in the momentum transfer space from proton-proton scattering: An empirical analysis, *Eur. Phys. J.*, **54C** (2008), 555–576.

[2] B.L.J. Braaksma, Asymptotic expansions and analytical continuation for a class of Barnes-integrals, *Compositio Math.*, **15** (1962), 239–341.

[3] E. Capelas de Oliveira, "Funções Especiais com Aplicações", Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005.

[4] E. Capelas de Oliveira, J. Vaz Jr., FS. Costa, The fractional Schrödinger equation for delta potentials, (2010), *Journal of Mathematical Physics* (aceito).

[5] E. Capelas de Oliveira, J. Vaz Jr., Tunneling in fractional quantum mechanics, (2010) *Submetido à publicação.*

[6] M. Caputo, Vibrations of an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **56** (1974), 897–904.

[7] W. Chen, S. Holm, Physical interpretation of fractional diffusion-wave equation via lossy media obeying frequency power law, arXiv.org/abs/math-ph/0303040 (2003).

[8] Debnath, Recent applications of fractional calculus to science and engineering, *Int. J. Math.*, **2003** (2003), 3413–3442.

[9] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi, "Higher Transcendental Functions", Vol.1, McGraw-Hill, New York, 1953.

[10] R. Figueiredo Camargo, A.O. Chiacchio, E. Capelas de Oliveira, Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation, *J. Math. Phys.*, **49** (2008), 033505.

[11] R. Figueiredo Camargo, R. Charnet, E. Capelas de Oliveira, On some fractional Green's functions, *J. Math. Phys.*, **50** (2009), 043514.

[12] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira, J. Vaz Jr., On anomalous diffusion and the fractional generalized Langevin equation for a harmonic oscillator, *J. Math. Phys.*, **50** (2009), 123518.

[13] C. Fox, The G and H functions as symmetrical Fourier kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **98** (1961), 395–429.

[14] D. Gomes, E. Capelas de Oliveira, The generating function for $E_n^\ell(\rho)$ polynomials, *Algebras, Groups and Geometries*, **14** (1997) 49–57.

[15] P. Inizan, Homogeneous fractional embeddings, *J. Math. Phys.*, **49** (2008), 082901.

[16] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Mathematics Studies, Vol. 204, Edited by Jan van Mill, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[17] V. Kiryakova, The special functions of fractional calculus as generalized fractional calculus operators of some basic functions, *Comp. Math. Appl.*, **59** (2010), 1128–1141.

[18] G. Lauricella, Sulla funzione ipergeometrica a più variabili, *Rend. Circ. Math. Palermo*, **7** (1893), 111–158.

[19] E.K. Lenzi, L.R. Evangelista, M. K. Lenzi, H. V. Ribeiro and E. Capelas de Oliveira, Solutions of a Non-Markovian Diffusion Equation, *Phys. Lett. A*, **374** (2010) 4193–4198.

[20] C.F. Lorenzo, T.T. Hartley, Initialized fractional calculus, NASA/TP–2000–209943.

[21] F. Mainardi, "Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity", World Scientific Publishing Co., London, 2010.

[22] F. Mainardi, R. Gorenflo, On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution process, *J. Comput. Appl. Math.*, **118** (2000), 283–299.

[23] F. Mainardi, G. Pagnini, Salvatore Pincherle: the pioneer of the Mellin-Barnes integrals, *J. Comput. Appl. Math.*, **153** (2003), 331–342.

[24] F. Mainardi, G. Pagnini, R.K. Saxena, Fox H function in fractional diffusion, *J. Comput. Appl. Math.*, **178** (2005), 321–331.

[25] A.M. Mathai, H.J. Haubold, "Special Functions for Applied Scientistic", Springer, Heidelberg, 2008.

[26] A.M. Mathai, R.S. Saxena, H.J. Haubold, "The $H-$Function. Theory and Applications", Springer, New York, 2010.

[27] G.S. Meijer, On the G function I-VIII, *Nederl. Akad. Wettensch. Proc.*, **49**, (1946), 227–237, 344–356, 457–469, 632–641, 765–772, 936–943, 1063–1072, 1165–1175. Traduzido para o Inglês: *Indag. Math.*, **8**, (1946), 124–134, 213–225, 312–324, 391–400, 468–475, 595–602, 661–670 e 713–723.

[28] E.A. Notte Cuello, M.J. Menon, E. Capelas de Oliveira, Inverse problems in Hadron scattering and the Fox's $H-$function (2010), *Submetido à publicação.*

[29] S. Pincherle, Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate, *Atti R. Accad. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **4** (1888), 694–700 e 792–799.

[30] I. Podlubny, "Fractional Differential Equations", Mathematics in Science and Engineering, Vol.198, Academic Press, San Diego, 1999.

[31] T.R. Prabhakar, A singular integral equation with generalized Mittag-Leffler function in the kernel, *Yokohama Math. J.*, **19** (1971), 7–15.

[32] E.D. Rainville, "Special Function", The Macmillan Company, New York, 1967.

[33] R.K. Saxena, In memorium of Charles Fox, *Fract. Cal. Appl. Anal.*, **12** (2009), 337–344.

[34] I.N. Sneddon, "The Use of Integral Transforms", McGraw-Hill, New York, 1972.

[35] Rui Yu, H. Zhang, New function of Mittag-Leffler type and its application in the fractional diffusion-wave equation, *Chaos, Solitons* & *Fractals*, **30** (2006), 946–955.

[36] N.N. Temme, "Special Function: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics", Wiley, New York, 1996.