

## Grafos que Geram Emparelhamento de Arestas Relacionados à Tesselação $\{12g - 6, 3\}$

G.F. da SILVA<sup>1\*</sup>, M.B. FARIA<sup>2</sup> e C. MENDES de JESUS<sup>2</sup>

Recebido em 29 setembro, 2012 / Aceito em 3 junho, 2014

**RESUMO.** O objetivo deste trabalho é por meio de grafos trivalentes obter emparelhamentos de arestas para polígonos hiperbólicos regulares conduzindo a superfícies de Riemann orientadas e compactas. Neste trabalho, apresenta-se um procedimento para a obtenção de três casos de emparelhamentos generalizados relacionados à tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ .

**Palavras-chave:** geometria hiperbólica, emparelhamento de arestas, polígonos, grafos, superfícies, tesselação.

### 1 INTRODUÇÃO

A principal contribuição deste trabalho está relacionada à apresentação de uma forma sistemática de obtenção de emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos regulares via grafos conduzindo a superfícies de Riemann orientadas e compactas. Em outras palavras, obtemos via grafos trivalentes, emparelhamentos para polígonos hiperbólicos regulares com  $12g - 6$  arestas e ângulos iguais a  $2\pi/3$ , no caso em que o quociente do plano hiperbólico por um grupo Fuchsiano  $\Gamma$  (gerado pelo emparelhamento do polígono),  $\mathbb{D}^2/\Gamma$ , é uma superfície compacta, orientável, de gênero  $g$ ,  $g \geq 2$ . Assim, esses polígonos estão associados a tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ .

Uma das motivações para o estudo de emparelhamento de arestas de polígonos hiperbólicos que estão associados à tesselação  $\{12g - 6, 3\}$  é que tais tesselações fornecem empacotamentos de esferas com densidade máxima ([3] e [1]) e, portanto, estão relacionadas com a construção de códigos ótimos cuja probabilidade de erro é mínima, [2]. Um apanhado bibliográfico relacionado a tesselações e códigos pode ser encontrado na introdução do trabalho [12].

Em [6], Jorgensen-Naatanen fizeram o estudo para o caso de  $g = 2$ , mostraram que, a menos de reflexão, existem 8 formas diferentes de emparelhamento de arestas de um polígono fundamental

---

\*Autor correspondente: Gheyza Ferreira da Silva

<sup>1</sup>Departamento de Matemática, ICEX, UFMG, 31270-901 Belo Horizonte, MG, Brasil.  
E-mail: gheyzaf@yahoo.com.br

<sup>2</sup>Departamento de Matemática, Campus UFV, 36570-000 Viçosa, MG, Brasil.  
E-mails: mercio@ufv.br; cmendes@ufv.br

com 18 arestas,  $\mathcal{P}_{18}$ , tal que a superfície correspondente  $S$  é orientável de gênero 2 e o grafo induzido formado pela fronteira de  $\mathcal{P}_{18}$  é um grafo trivalente com 9 arestas e 6 vértices.

Em [4] e [5], Faria e Palazzo construíram as generalizações para os 8 casos possíveis de emparelhamentos para polígonos com 18 arestas correspondentes a  $g = 2$  na tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ .

Lee Mosher, em [8], mostrou que existem 1726 tipos diferentes de emparelhamentos de polígonos fundamentais  $\mathcal{P}_{12g-6}$  que conduzem a superfícies de gênero 3. Se desconsiderarmos as imagens espelho desses padrões, então são essencialmente 927 padrões de emparelhamentos. Utilizando métodos semelhantes aos de [6] e considerando  $g = 3$ , Gou Nakamura em [9], através de grafos trivalentes obteve, e exibiu em seu trabalho, os 927 padrões de emparelhamentos.

Os artigos acima citados, [6] e [9], serviram como inspiração para este estudo onde através de grafos trivalentes obtemos mais emparelhamentos de arestas para polígonos hiperbólicos com  $12g - 6$  arestas, tais que todos os ciclos de vértices tem comprimento 3. Desse modo, o grupo  $\Gamma$  gerado pelo emparelhamento das arestas desses polígonos fornece, através do quociente pelo plano hiperbólico,  $\frac{\mathbb{D}^2}{\Gamma}$ , uma superfície de Riemann  $S$  compacta orientável de gênero  $g$ ,  $g \geq 2$ .

Neste trabalho, nós generalizamos para  $g > 3$  a construção de grafos trivalentes baseados nos casos B-14, B-10 e A-3, considerados por Nakamura, em [9], para  $g = 3$ . E a partir destes, obtemos os emparelhamentos de arestas para polígonos hiperbólicos regulares com  $12g - 6$  arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é fechada, orientável e compacta de gênero  $g$ , conforme veremos nas subseções 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente.

O presente artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2, apresentamos algumas definições preliminares ao desenvolvimento do trabalho. Já na seção 3, tratamos das três generalizações obtidas a partir das idéias apresentadas em [6] e [9]. Finalizamos com a conclusão na seção 4.

## 2 EMPARELHAMENTO DE ARESTAS E GRAFOS

Utilizaremos o modelo do disco unitário  $\mathbb{D}^2$  para a geometria hiperbólica plana. Seja  $\mathcal{P}$  um polígono fechado convexo em  $\mathbb{D}^2$  e seja  $\mathcal{A}$  o conjunto de todas as arestas de  $\mathcal{P}$ .

**Definição 2.1.** *Um emparelhamento de arestas é o conjunto  $\Phi = \{\gamma_\tau | \tau \in \mathcal{A}\}$  de isometrias que, para toda aresta  $\tau \in \mathcal{A}$  temos,*

- 1) existe aresta  $\tau' \in \mathcal{A}$  com  $\gamma_\tau(\tau') = \tau$ ;
- 2) as isometrias  $\gamma_\tau$  e  $\gamma_{\tau'}$  satisfazem a relação  $\gamma_{\tau'} = \gamma_\tau^{-1}$ ;
- 3) se  $\tau$  for aresta de  $\mathcal{P}$  então  $\tau' = \mathcal{P} \cap \gamma_\tau^{-1}(\mathcal{P})$ .

A definição de um grafo é apresentada a seguir.

**Definição 2.2.** [13, p. 5], [7, p. 3] *Um grafo  $G$  consiste de um par de conjuntos  $(V(G), A(G))$  onde  $V(G)$  é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices de  $G$ , e  $A(G)$  é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos de  $V(G)$ , chamados arestas de  $G$ .*

Neste texto, vamos nos restringir a grafos em que o conjunto de vértices  $V(G)$  é finito. Utilizaremos caminhos em grafos conexos trivalentes, para gerar um emparelhamento de arestas de polígonos, assim seguem as definições.

**Definição 2.3.**

- 1) O **grau** (ou **valência**) de um vértice  $v$  é o número de arestas (cada laço conta duas vezes) incidentes a ele.
- 2) Um grafo  $G$  onde cada vértice tem o mesmo grau  $k$  é um **grafo  $k$ -regular**.
- 3) Um grafo 3-regular é chamado **cúbico** ou **trivalente**.

**Definição 2.4.** [6, p. 453] Dado um grafo  $G$ , uma **rotação** de um vértice  $v$  de  $G$  é uma permutação cíclica de todas as arestas incidentes com  $v$ .

Como os vértices tem grau 3, existem apenas duas rotações não triviais: a rotação no sentido horário e a rotação no sentido anti-horário, indicadas por um círculo preenchido ( $\bullet$ ) e por um círculo vazio ( $\circ$ ), respectivamente, conforme [6]. O círculo preenchido ( $\bullet$ ) corresponde caminhar para a aresta da esquerda e o círculo vazio ( $\circ$ ) corresponde caminhar para a aresta da direita ([6], [9]).

A seguir, tratamos dos grafos a partir dos quais obtemos os emparelhamentos de arestas generalizados.

### 3 EMPARELHAMENTOS GENERALIZADOS A PARTIR DE GRAFOS

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos de um procedimento que deduzimos, em [10], para encontrar os emparelhamentos relacionados aos gêneros  $g = 2$  e  $g = 3$ , apresentados em [6] e [9], respectivamente. Além disso, analisamos situações para  $g > 3$  e obtivemos expressões generalizadas para estas situações.

Seja  $G$  um grafo trivalente conexo, imerso em uma superfície fechada  $S$  de gênero  $g$  de forma que  $S \setminus G$  seja uma única componente conexa correspondente a um polígono fundamental  $\mathcal{P}$ . Sejam  $n_a$  e  $n_v$  o número de arestas e de vértices de  $G$ , respectivamente. E seja  $f$  o número de faces (2-células) de  $S$ . Então, pela Fórmula da característica de Euler, temos:

$$2 - 2g = n_v - n_a + f \implies 2 - 2g = n_v - n_a + 1 \implies n_a = n_v + 2g - 1. \quad (3.1)$$

Logo, se o número de arestas de  $G$  é igual a  $n_a = (12g - 6)/2$  então o número de vértices de  $G$  é igual a  $n_v = (12g - 6)/3$ . Assim, cortando  $S$  ao longo de  $G$  obtemos um polígono fundamental  $\mathcal{P}_{12g-6}$  com  $12g - 6$  arestas e um emparelhamento de arestas associado.

Seja  $G$  um grafo trivalente com  $(12g - 6)/3$  vértices e  $(12g - 6)/2$  arestas. Para examinar se  $G$  é imerso em  $S$ , com complemento conexo, deve-se analisar se existem caminhos fechados em  $G$ . Logo, é necessário e suficiente que [6, pág. 405]:

- a) caminhamos em cada aresta de  $G$  exatamente uma vez em cada sentido e;
- b) não retornemos imediatamente na mesma aresta da qual viemos.

Assim, consideremos os grafos B-14, B-10 e A-3 das Figuras 1, 7 e 8, respectivamente, onde os casos  $g = 3$  foram apresentado por Nakamura em [9] e nos serviram de inspiração para gerar os grafos de outros gêneros. Apresentaremos primeiro o caso B-14, [11].

### 3.1 Grafo B-14 gerando emparelhamento $\{12g - 6, 3\}$

Consideremos o grafo B-14 (apresentado por Nakamura em [9]) e atribuímos uma rotação a este grafo que satisfaça as condições (a) e (b) citadas acima, Figura 1 ( $g = 3$ ). Através deste grafo criamos novos grafos trivalentes para  $g = 4$  e para  $g = 5$  do seguinte modo: aumentamos o número de arestas de seis em seis buscando uma semelhança entre eles. Observe que desse modo, poderíamos continuar para  $g > 5$ , Figura 1.

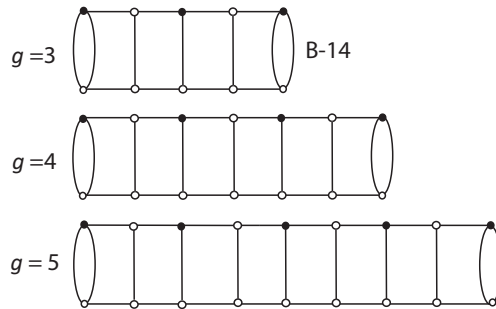


Figura 1: Grafos trivalentes com  $(12g - 6)/2$  arestas e  $(12g - 6)/3$  vértices.

Assim, consideremos o grafo B-14,  $g = 3$  com a rotação indicada na Figura 1. Se contarmos o número de arestas pelo caminho em ordem, para chegar na mesma aresta com direção oposta, obtemos uma sequência cíclica de números, dando as identificações no polígono de  $12g - 6$  arestas,  $g = 3$ . De forma mais detalhada, tome o grafo B-14,  $g = 3$  e atribua uma rotação de forma que as condições (a) e (b) sejam válidas. Em seguida, execute os seguintes passos:

- I) Rotule as arestas por  $a, b, c, \dots, o$  (veja Fig. 2).
- II) Escolha um vértice e um sentido e percorra as arestas de B-14 respeitando as orientações dos vértices e de forma que todas as arestas sejam percorridas nos dois sentidos<sup>3</sup>.
- III) Numere o caminho percorrido conforme indicado no item II (para exemplo veja Fig. 2). Note que cada aresta possui uma (e somente uma) numeração em cada sentido, Figura 2. Assim, ao chegar no vértice inicial por uma direção oposta, tendo percorrido cada aresta nos dois sentidos, temos um caminho fechado de comprimento  $12g - 6$ , já que o grafo possui  $n_v$  arestas.

<sup>3</sup>somente uma vez para cada sentido da aresta

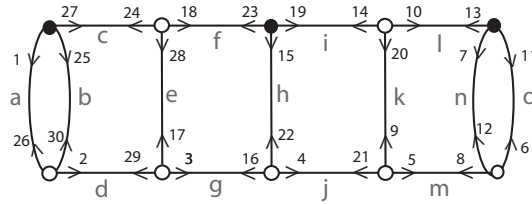


Figura 2: Caminho fechado no grafo B-14.

- IV) Denote por  $C_y$  com  $y \in \{a, b, \dots, o\}$  o comprimento do caminho em cada aresta  $y$ . Temos então dois valores correspondentes ao comprimento  $C_y$ , um para cada sentido. Denote por  $C'_y$  o comprimento de  $y$  no sentido que vai do número menor para o maior e por  $C''_y$  o comprimento da aresta  $y$  no sentido contrário.
- V) Para cada aresta  $y$ ,  $C'_y$  é dado pelo módulo da diferença entre os dois números na aresta menos um. Suponha que  $C'_y = x$ . O comprimento do caminho para o outro sentido, é dado por  $C''_y = (12g - 8) - x$ . Assim, para o caso  $g = 3$ ,  $C''_y = 28 - x$ . Por exemplo, veja Figura 2, na aresta  $e$  temos as numerações 28 e 17. Considerando o sentido que vai do número 17 para o 28 então  $C'_e = |17 - 28| - 1 = 10$ . Agora, considerando o sentido oposto (que vai do 28 para o 17) temos  $C''_e = 28 - 10 = 18$ , Figura 3.

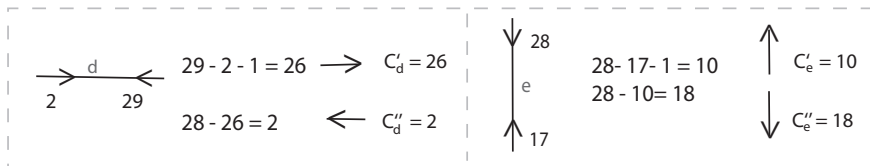


Figura 3: Comprimento dos caminhos das arestas d e e.

Dessa forma, seguindo a ordem percorrida pelo caminho de comprimento  $12g - 6$  anota-se cada um dos comprimentos  $C_y$  dos caminhos para cada  $y$ . Assim, obtém-se uma sequência cíclica de 30 números, ou seja, de  $12g - 6$  números onde  $g = 3$ :

24 26 12 16 2 4 4 26 10 2 24 24 26 4 6 16 10 4 24 18 12 22 24 2 4 4 26 18 2 24

Analogamente, para o caso  $g = 4$  e  $g = 5$ , obtém-se uma sequência cíclica de 42 e 54 números, respectivamente.

Para  $g = 4$  temos a identificação:

36 38 24 28 12 16 2 4 4 38 10 2 36 36 38 4 6 28 12 4 36 30 24 34 36 4  
6 16 10 4 36 28 12 34 36 2 4 4 38 30 2 36

Para  $g = 5$  temos a identificação:

48 50 36 40 24 28 12 16 2 4 4 50 10 2 48 48 50 4 6 40 12 4 48 42 36 46 48  
4 6 28 12 4 48 40 24 46 48 4 6 16 10 4 48 40 12 46 48 2 4 4 50 42 2 48

Considere um polígono  $\mathcal{P}_{12g-6} \subset \mathbb{D}^2$  com  $12g - 6$  arestas, onde  $\mathbb{D}^2$  representa o plano hiperbólico. Denotamos seus vértices no sentido anti-horário por  $\{v_1, v_2, \dots, v_{12g-6}\}$  e suas arestas por  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{12g-6}\}$  onde  $\tau_i$  é o segmento geodésico iniciando em  $v_i$  e findando em  $v_{i+1}$ ,  $i \bmod (12g - 6)$ .

Agora, coloque cada sequência num polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e depois identifique os lados correspondentes  $\{x, (12g - 8) - x\}$ . Note que, como cada aresta do grafo corresponde a identificação de duas arestas do polígono, então o valor  $x$  do comprimento do caminho de uma aresta de  $G$  deve ser identificado com o  $(12g - 8) - x$  da mesma aresta.

Assim, temos um emparelhamento  $\Phi_{12g-6}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ . Os emparelhamentos correspondentes as sequências acima para  $g = 3, 4$  e  $5$  são ilustrados nas Figuras 4, 5 e 6, respectivamente.

Com isso, acabamos de mostrar o seguinte resultado.

**Proposição 3.1.** *Caminhos fechados sobre os grafos para  $g = 4$  e para  $g = 5$  da Figura 1 de forma que as condições (a) e (b) sejam válidas dão origem a um emparelhamento de arestas de um polígono fundamental  $\mathcal{P}$  com  $12g - 6$  arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é fechada orientável de gênero  $g$ .*

Consideremos os emparelhamentos obtidos anteriormente. Estes, foram obtidos através de grafos “semelhantes” com rotações “semelhantes”. No sentido de que, seguindo o mesmo raciocínio poderíamos ter continuado a construir grafos e atribuir rotações para  $g > 5$ . Assim, buscamos uma relação entre suas identificações. Denotaremos por  $\{a, b\}$  se a aresta  $a$  é identificada com a aresta  $b$ . Observamos uma forma generalizada de representar as identificações das arestas de  $\mathcal{P}_{12g-6}$  como segue:

$$\{\tau_{12g-12}, \tau_{12g-9}\}, \{\tau_{12g-11}, \tau_{12g-6}\}, \{\tau_{12g-10}, \tau_1\}, \{\tau_{12g-8}, \tau_{12g-19}\}, \{\tau_{12g-7}, \tau_2\}, \\ \{\tau_{2g-1}, \tau_{2g+2}\}, \{\tau_{2g}, \tau_{2g+5}\}, \{\tau_{2g+1}, \tau_{2g+6}\}, \{\tau_{2g+3}, \tau_{2g+14}\}, \{\tau_{2g+4}, \tau_{2g+7}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 3$  e  $g \geq 3$ :

$$\{\tau_{3+2k}, \tau_{12g-20-10k}\}, \{\tau_{4+2k}, \tau_{12g-15-10k}\}, \\ \{\tau_{12g-22-10k}, \tau_{12g-17-10k}\}, \{\tau_{12g-21-10k}, \tau_{12g-14-10k}\}, \\ \{\tau_{12g-18-10k}, \tau_{12g-13-10k}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 4$  e  $g > 3$

$$\{\tau_{12g-16-10k}, \tau_{12g-29-10k}\}.$$

Considere as isometrias que identificam os pares conforme segue:

$$\alpha_1(\tau_{12g-12}) = \tau_{12g-9}, \alpha_2(\tau_{12g-11}) = \tau_{12g-6}, \alpha_3(\tau_{12g-10}) = \tau_1, \\ \alpha_4(\tau_{12g-8}) = \tau_{12g-19}, \alpha_5(\tau_{12g-7}) = \tau_2, \alpha_6(\tau_{2g-1}) = \tau_{2g+2}, \\ \alpha_7(\tau_{2g}) = \tau_{2g+5}, \alpha_8(\tau_{2g+1}) = \tau_{2g+6}, \alpha_9(\tau_{2g+3}) = \tau_{2g+14}, \alpha_{10}(\tau_{2g+4}) = \tau_{2g+7}.$$

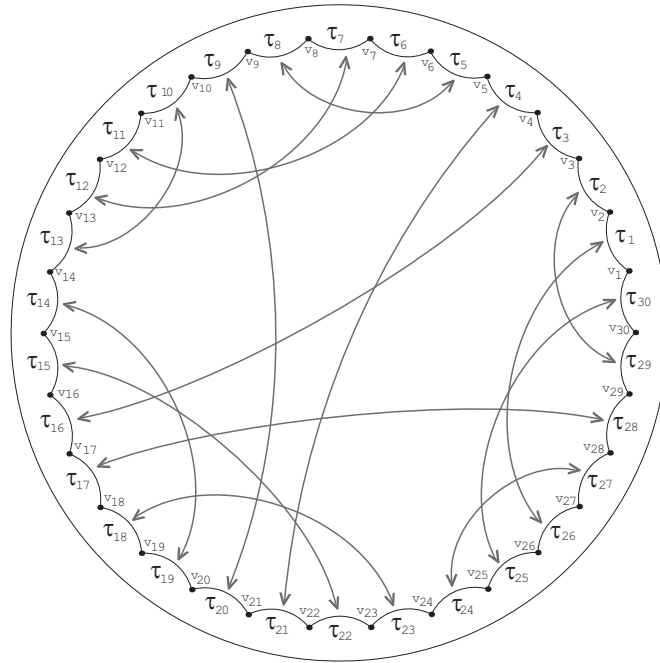


Figura 4: Emparelhamento de arestas gerado por B-14 para  $g = 3$

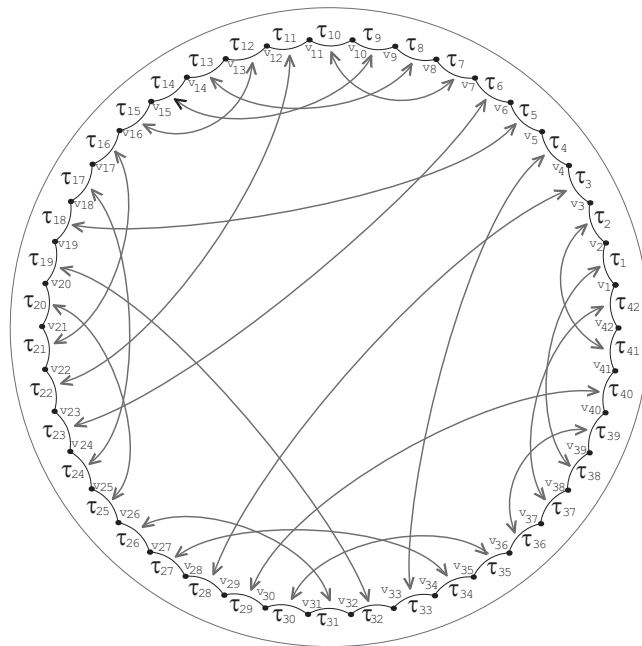


Figura 5: Emparelhamento de arestas gerado por B-14 para  $g = 4$ .

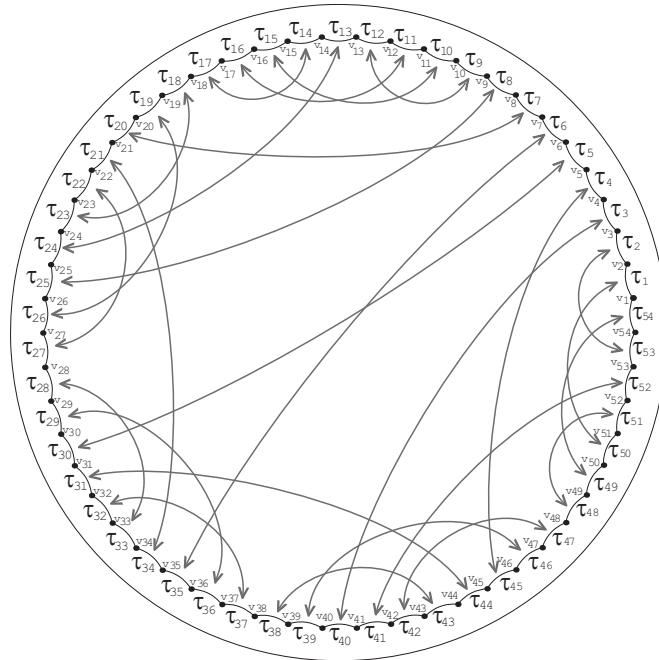


Figura 6: Emparelhamento de arestas gerado por B-14 para  $g = 5$ .

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 3, g \geq 3$ :

$$\begin{aligned} \beta_{1+6k}(\tau_{3+2k}) &= \tau_{12g-20-10k}, \quad \beta_{2+6k}(\tau_{4+2k}) = \tau_{12g-15-10k}, \\ \beta_{3+6k}(\tau_{12g-22-10k}) &= \tau_{12g-17-10k}, \quad \beta_{4+6k}(\tau_{12g-21-11k}) = \tau_{12g-14-10k}, \\ \beta_{5+6k}(\tau_{12g-18-10k}) &= \tau_{12g-13-10k}. \end{aligned}$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 4, g > 3$ :

$$\gamma_{1+k}(\tau_{12g-16-10k}) = \tau_{12g-29-11k}.$$

Logo, o conjunto formado pelas isometrias acima é um emparelhamento para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ , onde  $g \geq 3$ .

A seguir, apresentamos o caso generalizado baseado no grafo B-10, [10].

### 3.2 Grafo B-10 gerando emparelhamento $\{12g - 6, 3\}$

Considere o grafo B-10 que corresponde ao caso  $g = 3$  da Figura 7 (apresentado por Nakamura em [9]). Através deste caso criamos os grafos estendidos para  $g = 4$  e  $g = 5$  e atribuímos uma rotação a estes grafos de forma a obter caminhos fechados. Assim, considere as rotações dos grafos na Figura 7. Observe que poderíamos continuar para  $g > 5$ .



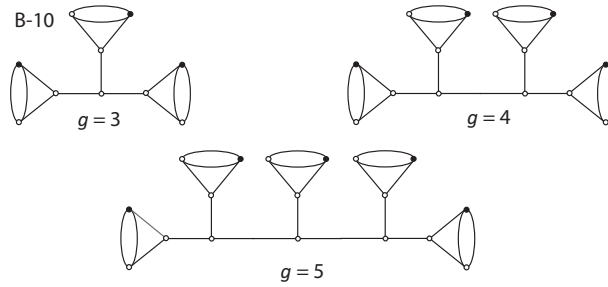


Figura 7: Grafos trivalentes com  $(12g - 6)/2$  arestas e  $(12g - 6)/3$  vértices.

Ao percorrer as arestas do grafo B-10, obtemos um caminho fechado nos grafos de forma que todas as arestas sejam percorridas nos dois sentidos. Assim, utilizando os mesmos procedimentos feitos para o caso B-14, obtemos uma sequência cíclica de 30 números:

25 26 20 8 2 3 3 26 2 25 25 26 20 8 2 3 3 26 2 25 25 26 20 8 2 3 3 26 2 25

Para o caso  $g = 4$  e  $g = 5$ , obtém-se uma sequência cíclica de 42 e 54 números, respectivamente.

Para  $g = 4$  temos a identificação:

37 38 32 20 8 2 3 3 38 2 37 37 38 32 8 2 3 3 38 2 37 37 38 32 20  
8 2 3 3 38 2 37 37 38 32 8 2 3 3 38 2 37

Para  $g = 5$  temos a identificação:

49 50 44 32 20 8 2 3 3 50 2 49 49 50 44 8 2 3 3 50 2 49 49 50 44 32 8 2  
3 3 50 2 49 49 50 44 20 8 2 3 3 50 2 49 49 50 44 8 2 3 3 50 2 49

Colocando cada sequência num polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e identificando os lados correspondentes  $\{x, (12g - 8) - x\}$ , temos um emparelhamento  $\Phi_{12g-6}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ .

Assim, podemos apresentar o seguinte resultado.

**Proposição 3.2.** *Caminhos fechados sobre os grafos para  $g = 4$  e  $g = 5$  da Figura 7 de forma que as condições (a) e (b) sejam válidas dão origem a um emparelhamento de arestas de um polígono fundamental  $\mathcal{P}$  com  $12g - 6$  arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é fechada orientável de gênero  $g$ .*

Agora, consideremos os emparelhamentos obtidos pelos grafos criados de B-10. Estes, também foram obtidos através de grafos “semelhantes” com rotações “semelhantes”. Assim, observamos uma forma generalizada de representar as identificações das arestas de  $\mathcal{P}_{12g-6}$ , onde denotamos por  $\{a, b\}$  se a aresta  $a$  é identificada com a aresta  $b$ , como segue:

$\{\tau_3, \tau_{12g-12}\}, \{\tau_2, \tau_{12g-7}\}, \{\tau_1, \tau_{12g-9}\}, \{\tau_{12g-11}, \tau_{12g-8}\}, \{\tau_{12g-10}, \tau_{12g-6}\},$   
 $\{\tau_{g+1}, \tau_{g+10}\}, \{\tau_{g+2}, \tau_{g+5}\}, \{\tau_{g+3}, \tau_{g+7}\}, \{\tau_{g+4}, \tau_{g+8}\}, \{\tau_{g+6}, \tau_{g+9}\}.$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 3$  e  $g \geq 3$ :

$$\{\tau_{12g-22-11k}, \tau_{12g-13-11k}\}, \{\tau_{12g-21-11k}, \tau_{12g-18-11k}\}, \{\tau_{12g-20-11k}, \tau_{12g-16-11k}\}, \\ \{\tau_{12g-19-11k}, \tau_{12g-15-11k}\}, \{\tau_{12g-17-11k}, \tau_{12g-14-11k}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 4$  e  $g > 3$ :

$$\{\tau_{4+k}, \tau_{12g-23-11k}\}.$$

Considere as isometrias que identificam os pares conforme segue:

$$\alpha_1(\tau_3) = \tau_{12g-12}, \alpha_2(\tau_2) = \tau_{12g-7}, \alpha_3(\tau_1) = \tau_{12g-9}, \alpha_4(\tau_{12g-11}) = \tau_{12g-8}, \\ \alpha_5(\tau_{12g-10}) = \tau_{12g-6}, \\ \alpha_6(\tau_{g+1}) = \tau_{g+10}, \alpha_7(\tau_{g+2}) = \tau_{g+5}, \alpha_8(\tau_{g+3}) = \tau_{g+7}, \alpha_9(\tau_{g+4}) = \tau_{g+8}, \\ \alpha_{10}(\tau_{g+6}) = \tau_{g+9}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 3, g \geq 3$ :

$$\beta_{1+6k}(\tau_{12g-22-11k}) = \tau_{12g-13-11k}, \beta_{2+6k}(\tau_{12g-21-11k}) = \tau_{12g-18-11k}, \\ \beta_{3+6k}(\tau_{12g-20-11k}) = \tau_{12g-16-11k}, \beta_{4+6k}(\tau_{12g-19-11k}) = \tau_{12g-15-11k}, \\ \beta_{5+6k}(\tau_{12g-17-11k}) = \tau_{12g-14-11k}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 4, g > 3$ :

$$\gamma_{1+k}(\tau_{4+k}) = \tau_{12g-23-11k}.$$

Logo, o conjunto formado pelas isometrias acima é um emparelhamento para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ , onde  $g \geq 3$ .

Analogamente aos casos anteriores, apresentamos mais um dos resultados novos que obtivemos em [10].

### 3.3 Grafo A-3 gerando emparelhamento $\{12g - 6, 3\}$

Considere o grafo A-3 que corresponde ao caso  $g = 3$  da Figura 8 (apresentado por Nakamura em [9]). Através deste caso criamos os grafos estendidos para  $g = 4$  e  $g = 5$  e atribuímos uma rotação a estes grafos de forma a obter caminhos fechados. Assim, considere as rotações dos grafos na Figura 8. Observe que poderíamos continuar para  $g > 5$ .

Utilizando os mesmos procedimentos feitos para o caso B-14, obtemos as seguintes identificações:

Para  $g = 3$ , temos:

$$4 \ 5 \ 11 \ 23 \ 3 \ 24 \ 8 \ 23 \ 25 \ 16 \ 9 \ 11 \ 4 \ 14 \ 17 \ 20 \ 12 \ 24 \ 3 \ 4 \ 19 \ 3 \ 25 \ 17 \ 24 \ 25 \ 12 \ 5 \ 14 \ 16$$

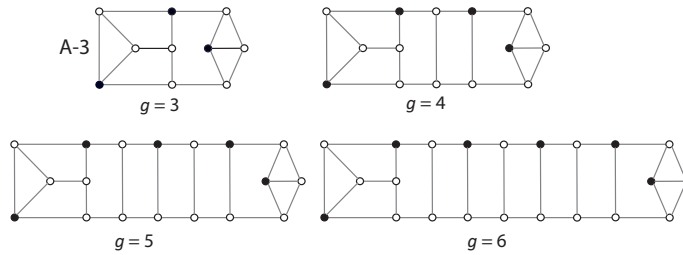


Figura 8: Grafos trivalentes com  $(12g - 6)/2$  arestas e  $(12g - 6)/3$  vértices.

Para  $g = 4$  temos a identificação:

4 5 30 35 3 36 27 35 37 28 5 16 9 11 4 13 35 19 11 36 3  
 4 31 3 37 29 36 37 24 27 29 4 7 10 13 5 36 21 12 5 33 35

Para  $g = 5$  temos a identificação:

4 5 42 47 3 48 39 47 49 40 24 28 5 16 9 11 4 13 47 19 11 48 3 4 43 3 49 41  
 48 49 36 39 41 4 6 28 12 4 48 33 24 46 48 4 7 10 13 5 48 40 12 5 45 47

Logo, podemos apresentar o seguinte resultado.

**Proposição 3.3.** *Caminhos fechados sobre os grafos para  $g = 4$  e  $g = 5$  da Figura 8 de forma que as condições (a) e (b) sejam válidas dão origem a um emparelhamento de arestas de um polígono fundamental  $\mathcal{P}$  com  $12g - 6$  arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é fechada orientável de gênero  $g$ .*

Similarmente aos dois casos anteriores nós obtemos a seguinte generalização do emparelhamento obtido para este caso, dado pelas identificações das arestas de  $\mathcal{P}_{12g-6}$  como segue:

Para  $g = 3$ , algumas identificações não se adéquam ao caso geral, assim colocaremos estas separadas como segue:

$$\{\tau_3, \tau_{15}\}, \{\tau_7, \tau_{16}\}, \{\tau_{14}, \tau_{29}\}, \{\tau_{17}, \tau_{30}\}.$$

Se  $g \geq 3$ , temos:

$$\{\tau_1, \tau_6\}, \{\tau_2, \tau_8\}, \{\tau_4, \tau_{-2}\}, \{\tau_5, \tau_9\}, \{\tau_{10}, \tau_{-3}\},$$

$$\{\tau_{2g+5}, \tau_{2g+15}\}, \{\tau_{2g+6}, \tau_{2g+18}\}, \{\tau_{2g+7}, \tau_{2g+12}\}, \{\tau_{2g+13}, \tau_{2g+17}\}, \{\tau_{2g+14}, \tau_{2g+19}\},$$

$$\{\tau_{2g+16}, \tau_{2g+20}\}.$$

Se  $g \geq 4$ , temos:

$$\{\tau_{2g+3}, \tau_{2g+9}\}, \{\tau_{2g+4}, \tau_{2g+21}\}, \{\tau_{2g+10}, \tau_{2g+30}\}, \{\tau_{2g+11}, \tau_{2g+23}\}, \{\tau_{2g+8}, \tau_{2g+22}\},$$

$$\{\tau_{12g-16}, \tau_{12g-11}\}, \{\tau_{12g-15}, \tau_{12g-7}\}, \{\tau_{12g-12}, \tau_{12g-6}\}, \{\tau_3, \tau_{12g-14}\}, \{\tau_7, \tau_{12g-13}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 5$  e  $g \geq 5$ , temos:

$$\begin{aligned} & \{\tau_{2g+24+10k}, \tau_{2g+29+10k}\}, \{\tau_{2g+25+10k}, \tau_{2g+32+10k}\}, \{\tau_{2g+27+10k}, \tau_{2g+40+10k}\}, \\ & \{\tau_{2g+28+10k}, \tau_{2g+33+10k}\}, \\ & \{\tau_{11+2k}, \tau_{12g-24-10k}\}, \{\tau_{12+2k}, \tau_{12g-19-10k}\}. \end{aligned}$$

O conjunto das isometrias que identificam os pares acima é um emparelhamento para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ , para cada  $g \geq 3$ .

#### 4 CONCLUSÕES

Ao longo deste artigo vimos que através destes três grafos trivalentes, estendidos a partir dos apresentados por Nakamura, podemos gerar três distintos emparelhamentos de arestas para polígonos hiperbólicos com  $12g - 6$  arestas, tais que todos os ciclos de vértices tem comprimento 3 sendo, portanto, domínios fundamentais da tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ . Estas tesselações, fornecem empacotamentos de esferas com densidade máxima, [3], ou seja, quando  $g \rightarrow \infty$  o valor da densidade tende ao seu limite superior  $\frac{3}{\pi}$ . A densidade de empacotamento tem uma relação inversamente proporcional com a probabilidade de erro de decodificação, ou seja, quando a densidade de empacotamento do código tende ao máximo a probabilidade de erro tende ao seu valor mínimo.

Além dos emparelhamentos apresentados neste artigo, outros foram construídos e estão expostos em [10]. Estudos continuam sendo desenvolvidos, com o objetivo de conseguir emparelhamentos de arestas generalizados os quais pretendemos publicá-los em trabalhos futuros.

#### AGRADECIMENTOS

G.F. da Silva agradece à CAPES e ao CNPq pelos apoios financeiros no mestrado e doutorado, respectivamente. M.B. Faria e C. Mendes de Jesus agradecem ao Departamento de Matemática e à UFV pelo apoio.

**ABSTRACT.** The aim of this work is using trivalent graphs to obtain side-pairings for regular hyperbolic polygons which leading to oriented and compact Riemann surfaces. In this paper we present a procedure for obtaining three cases of generalized side-pairings patterns related to the tessellation  $\{12g - 6, 3\}$ .

**Keywords:** hyperbolic geometry, side-pairing, polygons, graphs, surfaces, tessellation.

#### REFERÊNCIAS

- [1] C. Bavard. Disques extrémaux et surfaces modulaires. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, V(2) (1996), 191–202.

- [2] R.G. Cavalcante, H. Lazari, J.D. Lima & R. Palazzo Jr. A new approach to the design of digital communication systems. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science – DIMACS Series, American Mathematical Society, Editors A. Ashikhimin and A. Barg*, **68** (2005), 145–177.
- [3] M.B. Faria. “Empacotamento de Esferas em Espaços Hiperbólicos”. Dissertação de mestrado, IMECC-UNICAMP, (2001).
- [4] M.B. Faria & R. Palazzo Jr. Emparelhamentos generalizados associados a tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ . *TEMA – Tend. Mat. Apl. Comp.*, **11**(1) (2010), 59–67.
- [5] M.B. Faria & R. Palazzo Jr. Emparelhamentos generalizados casos III e VI Associados a tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ , em “Anais do XXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações” (SBrt 2009), Blumenau-SC (2009).
- [6] T. Jorgensen & M. Naatanen. “Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons”. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, (2) **33** (1982), no. 132, 451–461.
- [7] B. Mohar & C. Thomassen. “Graphs on Surfaces”, p. 3. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland (2001).
- [8] L. Mosher. “A user’s guide to the mapping class group: once punctured surfaces”. *Proc. of a Comput. Sci.*, **25** (1996), 101–174.
- [9] G. Nakamura. “Generic fundamental polygons for surfaces of genus three”. *Kodai Math. J.*, **27**(1) (2004), 88–104.
- [10] G.F. da Silva. “Emparelhamento de Arestas de Polígonos Gerados por Grafos”. Dissertação de mestrado, DMA-UFV, (2011).
- [11] G.F. da Silva, M.B. Faria & C. Mendes de Jesus. Grafos que geram emparelhamento de arestas de polígonos com  $12g - 6$  arestas, em “Anais do XXXIV CNMAC”, Vol. 4, pp. 1055–1059, SBMAC, (2012).
- [12] M.J. Souza, M.B. Faria & R. Palazzo Jr. Edge-Pairing Isometries and Counting Dirichlet Domains on the Densest Tessellation  $\{12g - 6, 3\}$  for Signal Set Design, *Journal Franklin*, vol (2012), 1–9.
- [13] A.T. White. “Graphs of Groups on Surfaces”. North-Holland Mathematics Studies, Volume 188, p. 5. Elsevier Science B.V., Amsterdam, Netherlands (2001).