Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **2** (2001), 101-106.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

A Equação de Klein-Gordon Generalizada no Universo de Robertson-Walker

D. GOMES[1,2], E. CAPELAS de OLIVEIRA[3], Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, 13081-970 Campinas, SP, Brasil.

Resumo. Neste trabalho discute-se a equação de Klein-Gordon generalizada no universo de Robertson-Walker. Esta equação é introduzida mediante o operador invariante de Casimir de segunda ordem escrito em coordenadas hiperesféricas. O universo de de Sitter e do universo anti-de Sitter são caracterizados através de um parâmetro associado à curvatura do universo.

Discute-se, também, as soluções de freqüência positiva (negativa). Finalmente, recupera-se o caso Minkowskiano, isto é, o caso de curvatura nula.

1. Introdução

O estudo do teoria quântica de campos envolvendo efeitos gravitacionais pode ser visto como uma teoria para a interação quantizada da gravidade e matéria [2]. No contexto da teoria linear, os universos de de Sitter e anti-de Sitter são largamente estudados, porque, junto com o universo de Minkowsky, são os únicos que apresentam simetria máxima [16]. Aqui nós englobamos tais universos no chamado universo de Robertson-Walker, porque os três primeiros estão contidos neste dependendo de um parâmetro relacionado à curvatura do universo [7].

Muitos trabalhos têm tratado das chamadas equações de onda no universo de Robertson-Walker. Num trabalho recente Bros et al. [3] apresentam o estudo do campo escalar quantizado no universo de de Sitter baseado na analiticidade de variedades Riemanninas complexas. Mais recente, Takook [14] discute uma quantização covariante do campo espinorial livre no universo de de Sitter 4-dimensional.

De uma outra forma, Notte Cuello e Capelas de Oliveira [9] discutem a equação de onda de Dirac no universo de de Sitter valendo-se da fatoração do operador invariante de Casimir de segunda ordem associado ao grupo de Fantappié-de Sitter. Estes mesmos autores [10] apresentam e resolvem as equações de Klein-Gordon e Dirac usando os chamados harmônicos esféricos com peso de spin.

Neste trabalho nós discutimos a equação de onda de segunda ordem generalizada no universo de Robertson-Walker n-dimensional, a chamada equação de Klein-Gordon generalizada.

---

[1] Licenciado do Depto. de Matemática, UFSM.
[2] **e-mail:** denilson@ime.unicamp.br
[3] **e-mail:**capelas@ime.unicamp.br

O trabalho está organizado da seguinte forma: na primeira seção apresentamos o universo de Robertson-Walker e seus casos particulares, na segunda seção apresentamos a equação de onda de Klein-Gordon generalizada no universo de Robertson-Walker explicitamente, separamos as partes angular, radial e temporal desta equação usando um sistema de coordenadas conveniente e resolvemos a parte angular em termos dos harmônicos ultraesféricos. Convém observar que outros sistemas de coordenadas podem também ser empregados. Por exemplo, Arcidiacono, Notte Cuello e Capelas de Oliveira [1] usam coordenadas hiperesféricas canônicas para resolver a equação generalizada de Klein-Gordon no universo de de Sitter n-dimensional. Redmount e Takagi discutem a teoria de campos no universo de de Sitter mediante sua imersão no universo de Minkowski chato 5-dimensional [12], valendo-se das chamadas coordenadas hiperesféricas de Rindler. Enquanto, Polarski [11] discute a equação de onda generalizada no universo de de Sitter e anti-de Sitter 4-dimensional usando coordenadas poliesféricas.

Na quarta seção obtemos e discutimos as soluções da parte radial e temporal da equação de Klein-Gordon generalizada, na quinta seção discutimos as soluções da parte temporal e reobtemos certos resultados do clássico trabalho de Chernikov e Tagirov [4]. Recuperamos, também, como um caso particular, as exponenciais de freqüência positiva(negativa) no universo n-dimensional que foram discutidos por Tagirov [13] e por Wyrozumski [17].

2. O Universo de Robertson-Walker

O universo de Robertson-Walker é obtido das equações de campo de Einstein homogêneas e isotrópicas na sua parte espacial. Na ausência de matéria e radiação, tal universo, reduz-se aos universos de de Sitter, Minkowski e anti-de Sitter, dependendo da constante cosmológica, e consequentemente da curvatura do universo, ser positiva, nula ou negativa, respectivamente. É com esta restrição que consideramos o universo de Robertson-Walker.

O universo de Robertson-Walker n-dimensional pode ser visto como uma pseudo-esfera de raio r_0 imersa num espaço de Minkowski $(n+1)$-dimensional

$$-(\xi_0)^2 + \sum_{j=1}^{n} (\xi_j)^2 = (r_0)^2,$$

onde $\xi_n = \bar{\xi}_n/\sqrt{k}$ e $r_0 = \bar{r}_0/\sqrt{k}$, $\bar{r}_0, k \in \mathbb{R}$; para $k = 1$ tem-se o universo de de Sitter, para $k = -1$ tem-se o universo anti-de Sitter e no limite $k \to 0$ o universo de Minkowski.

Um possível sistema de coordenadas admitido pelo universo de Robertson-Walker é

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= r_0 \operatorname{senh} \tau \\
\xi_1 &= r_0 \cosh \tau \operatorname{sen} \chi \cos \theta_1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{n-1} &= r_0 \cosh\tau \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\theta_1 \ldots \operatorname{sen}\phi \\ \xi_n &= r_0 \cosh\tau \cos\chi, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\tau \in \mathbb{R}$, $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta_j \leq \pi$, $j = 1, 2, \ldots, n-3$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Fazendo $\bar{\tau} = \tau r_0$ e $\varrho = r_0 \tan\chi$ tem-se a seguinte expressão para a métrica do universo de Robertson-Walker

$$ds^2 = -(d\bar{\tau})^2 + \cosh^2(\bar{\tau}/r_0)\left[\left(\frac{r_0^2}{r_0^2+\varrho^2}\right)^2 (d\varrho)^2 + \left(\frac{r_0^2\varrho^2}{r_0^2+\varrho^2}\right)(d\sigma)^2\right], \tag{2.2}$$

onde $(d\sigma)^2 = (d\theta_1)^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1 (d\theta_2)^2 \ldots + \operatorname{sen}^2\theta_1 \ldots \operatorname{sen}^2\theta_{n-3}(d\phi)^2$ é a métrica da esfera S^{n-2}. Note que no limite $k \to 0$, ou $\bar{r}_0 \to \infty$ tem-se a métrica de Minkowski.

3. A Equação de Klein-Gordon Generalizada

Nesta seção nós apresentamos e discutimos a chamada equação de onda de Klein-Gordon generalizada no universo de Robertson-Walker. A equação de Klein-Gordon generalizada é obtida do operador invariante de Casimir de segunda ordem [7, 8] associado ao grupo de isometrias do universo de Robertson-Walker, o chamado grupo de Fantappié-de Sitter; mais precisamente: o grupo $SO(1, n-1)$ para o universo de de Sitter, o grupo $SO(2, n-2)$ para o universo anti-de Sitter e o grupo de Poincaré para o universo de Minkowski que é obtido como limite dos dois primeiros, $\bar{r}_0 \to \infty$ e/ou $k \to 0$.

De modo geral a equação de Klein-Gordon generalizada é dada por

$$\nabla_a \nabla^a \psi - \frac{n-2}{4(n-1)} R_a{}^a \psi - m^2 \psi = 0, \tag{3.1}$$

onde $R_a{}^a$ é o escalar de curvatura, $m = m_0 c/\hbar$, m_0 é massa de repouso, $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π e c é a velocidade da luz. Note que esta equação é invariante conforme para $m = 0$ com peso conforme $s = 1 - n/2$, [15].

Nas coordenadas dadas em (2.1) a eq. (3.1) é dada por

$$\begin{aligned} &\left\{ -\frac{1}{(\cosh\tau)^{n-1}} \frac{\partial}{\partial\tau}\left((\cosh\tau)^{n-1} \frac{\partial}{\partial\tau} \right) + \frac{1}{\cosh^2\tau} \frac{1}{(\operatorname{sen}\chi)^{n-2}} \frac{\partial}{\partial\chi}\left((\operatorname{sen}\chi)^{n-2} \frac{\partial}{\partial\chi} \right) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\triangle_{\theta\phi}}{\cosh^2\tau \operatorname{sen}^2\chi} - \Omega \right\} \psi = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $\Omega = n(n-2)/4 + r_0^2 m^2$ e $\triangle_{\theta\phi}$ é o Laplaciano em coordenadas esféricas $(n-2)$-dimensional.

A eq. (3.2) pode ser resolvida por separação de variáveis. As equações resultantes nas variáveis τ e χ serão consideradas na próxima seção. A solução regular da parte angular é bem conhecida e é dada por

$$\varphi(\theta, \phi) = \alpha e^{\pm i m_d \phi} \prod_{k=0}^{d-1} (\operatorname{sen}\theta_{k+1})^{m_{k+1}} C_{m_k - m_{k+1}}^{m_{k+1} + \frac{d-k}{2}} (\cos\theta_{k+1}), \tag{3.3}$$

onde $C_\mu^\nu(x)$ são os polinômios de Gegenbauer, ou ultraesféricos, de grau μ e ordem ν; $d+1 = n-2$ é a dimensão da parte esférica, α uma constante não nula, $l = m_0 \geq m_1 \geq \ldots \geq m_d \geq 0$, e $m_j \in \mathbb{Z}^*$ para $j = 0, 1, 2 \ldots, d$.

4. Solução da Equação de Campo

Consideramos aqui a equação de campo, eq. (3.2), que, após separação de variáveis, reduz-se às equações diferenciais ordinárias nas variáveis χ e τ; uma vez que já conhecemos as soluções da parte angular e $\triangle_{\theta\phi}\varphi = -l(l+n-3)\varphi$. Estas equações são dadas por:

$$\left\{\frac{d^2}{d\chi^2} + (n-2)\cot\chi\frac{d}{d\chi} - \frac{l(l+n-3)}{\operatorname{sen}^2\chi}\right\}R(\chi) - \Lambda R(\chi) = 0, \tag{4.1}$$

$$\left\{\frac{d^2}{d\tau^2} + (n-1)\tanh\tau\frac{d}{d\tau} - \frac{\Lambda}{\cosh^2\tau}\right\}T(\tau) + \Omega T(\tau) = 0. \tag{4.2}$$

onde Λ é uma constante.

A eq. (4.1) admite solução regular em $\chi = 0$ e $\chi = \pi$ somente para $\Lambda = -s(s+n-2)$, $s \in \mathbb{Z}^*$ e $s \geq l$. Esta solução é dada em termos dos polinômios de Gegenbauer, mais precisamente

$$R(\chi) = \beta(\operatorname{sen}\chi)^l C_{s-l}^{l+(n-2)/2}(\cos\chi), \tag{4.3}$$

onde β é uma constante não nula.

Introduzindo a mudança $x = \operatorname{senh}\tau$ na variável independente na eq. (4.2) obtemos a seguinte equação

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{nx}{1+x^2}\frac{d}{dx}\right\}T(x) + \frac{\Omega(1+x^2)-\Lambda}{(1+x^2)^2}T(x) = 0. \tag{4.4}$$

Agora fazendo a mudança de variável dependente $T(x) = (1+x^2)^{(2-n)/4}u(x)$ obtemos

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2x}{1+x^2}\frac{d}{dx}\right\}u(x) + \left[\frac{4\mu^2}{(1+x^2)^2} + \frac{\nu(1-\nu)}{1+x^2}\right]u(x) = 0, \tag{4.5}$$

onde $2\nu = 1 - \sqrt{1-4r_0^2m^2}$ e $4\mu = n-2+2l$. Uma solução da eq. (4.5) dada em termos da função hipergeométrica é

$$u(x) = \left(-\frac{1+ix}{1-ix}\right)^\mu {}_2\mathrm{F}_1\left(1-\nu, \nu; 1+2\mu; \frac{1+ix}{2}\right). \tag{4.6}$$

Uma outra solução linearmente independente da eq. (4.5) é dada pelo complexo conjugado de $u(x)$. Denotando a primeira solução por $u_+(x)$ e esta segunda por $u_-(x)$ e notando que

$$\frac{1+ix}{1-ix} = \mathrm{e}^{2i\arctan x},$$

temos as duas soluções linearmente independentes da eq. (4.5),

$$u_{\pm}(x) = \gamma_{\pm} \mathrm{e}^{\pm i2\mu \arctan x} {}_2\mathrm{F}_1 \left(1-\nu, \nu; 1+2\mu; \frac{1 \pm ix}{2} \right), \tag{4.7}$$

onde $\gamma_{\pm}$ são constantes não nulas convenientes.

Assim, podemos expressar o par de soluções linearmente independentes da eq. (4.2) através das funções dadas em (4.7), temos

$$T_{\pm}(\tau) = \gamma_{\pm} (\cosh \tau)^{\frac{2-n}{n}} u_{\pm}(\operatorname{senh} \tau). \tag{4.8}$$

5. Considerações Finais

As propriedades das soluções dadas em (4.8) são apresentadas em um outro trabalho dos autores [5] e constituem um caso particular dos polinômios $E_n^l(\rho)$ introduzidos anteriormente, também, pelos autores [6]. Tais soluções são análogas às soluções de freqüência positiva(T_+) e negativas(T_-) no universo de Minkowski, ou seja, assim como estas, constituem a solução temporal da equação de onda de Klein-Gordon na base dada por (4.3) e (3.3), conforme também observado por Chernikov e Tagirov, [4, 13]. Recuperamos as soluções destes autores no caso do universo de de Sitter ($k = 1$) fazendo a identificação $\operatorname{senh} \tau = \tan \theta$.

Finalmente, consideramos alguns resultados particulares; quando $m = 0$, a solução da eq. (3.2), é invariante conforme, como já havíamos observado, temos, nesta situação, $\nu = 1$ e conseqüentemente $u_{\pm} = \text{constante}$.

Para $k \to 0$ e/ou $\bar{r}_0 \to \infty$, temos as seguintes aproximações

$$\cosh \tau \approx 1, \quad \operatorname{senh} \tau \approx \tanh \tau \approx \tau, \quad \tan \chi \approx \varrho$$

e, portanto, a solução da eq. (3.2) é dada assintoticamente por

$$\psi_{\pm} \approx \alpha \mathrm{e}^{\pm i2\mu\tau} (\varrho)^l \varphi(\theta, \phi),$$

que são ondas planas, como no caso Minkowskiano.

Abstract. We discuss the generalized Klein-Gordon second-order partial differential equation in the Robertson-Walker spacetime. This equation is introduced by mean of the Casimir second order invariant operator written in hyperspherical coordinates. The de Sitter and anti-de Sitter spacetimes are recovered by means of a convenient choice of the parameter associated to the spacetime curvature.

We discuss the case where we have positive(negative) frequency exponentials. Finally we recover the Minkowskian case, i.e. the case of null curvature.

Referências

[1] G. Arcidiacono, E. Capelas de Oliveira e E. A. Notte Cuello, The generalized Klein-Gordon equation, *Hadr. J. Suppl.* **13** (1998), 249-259.

[2] N.D. Birrel e P.C.W. Davies, Quantum Field in Curved Space, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[3] J. Bros, Jean-Pierre Gazeau e U. Moschella, Quantum field theory in the de Sitter universe, *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994), 1746-1749.

[4] N.A. Chernikov e E.A. Tagirov, Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time, *Ann. Ins. H. Poincaré* **9** (1968), 109-141.

[5] D. Gomes e E. Capelas de Oliveira, On the second order field equation, Submetido para Publicação (2000).

[6] D. Gomes e E. Capelas de Oliveira, On a new class of polynomials, *Hadronic J. Suppl.* **13** (1998), 383-392.

[7] D. Gomes, E.A. Notte Cuello e E. Capelas de Oliveira, Massless Klein-Gordon equation in the Robertson-Walker spacetimes, Submetido para Publicação (2000).

[8] D. Gomes, E.A. Notte Cuello e E. Capelas de Oliveira, A equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Robertson-Walker, em "Seleta do XXII CNMAC", Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, Vol. 1, Parte 1, pp. 101-110, SBMAC, 2000.

[9] E.A. Notte Cuello e E. Capelas de Oliveira, Dirac wave equation in the de Sitter universe, *Int. J. Theor. Phys.* **36** (1997), 1231-1247.

[10] E.A. Notte Cuello e E. Capelas de Oliveira, Klein-Gordon and Dirac equations in the de Sitter spacetime, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999), 585-598.

[11] D. Polarski, The scalar wave equation on static de Sitter and anti-de Sitter spaces, *Class. Quantum Grav.* **6** (1989), 893-900.

[12] I.H. Redmount e S. Takagi, Hyperspherical Rindler space, dimensional reduction and de Sitter scalar field theory, *Phys. Rev. D* **37** (1988), 1443-1455.

[13] E.A. Tagirov, Consequences of field quantization in de Sitter type cosmological models, *Ann. Phys.* **76** (1973), 561-579.

[14] M.V. Takook, Spin 1/2 field theory in the de Sitter spacetime, gr-qc/0005077, 2000.

[15] R.M. Wald, "General Relativity", The University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[16] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology: Principles and Aplications of the General Theory of Relativity", J. Wiley & Sons, New York, 1972.

[17] T. Wyrozumski, On an alternative construction of the vacuum in (1+3)-dimensional de Sitter spacetime, *Class. Quantum Grav.* **5** (1988), 1607-1613.