TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **4**, No. 1 (2003), 51-60.

Equações de Ondas no Universo de de Sitter

D. GOMES[1], Departamento de Matemática, CCNE, UFSM, 97119-900 Santa Maria, RS, Brasil

E. CAPELAS de OLIVEIRA[2], Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, 13081-970 Campinas, SP, Brasil.

Resumo. Neste trabalho apresentamos e discutimos as equações de Klein-Gordon e Dirac generalizadas no universo de de Sitter. Estas duas equações são obtidas a partir do operador invariante de Casimir de segunda ordem associado ao grupo das isometrias do universo de de Sitter, o qual é isomorfo ao grupo das pseudo rotações pentadimensionais.

1. Introdução

O universo de de Sitter é um dos mais empregados na teoria quântica de campos em espaços curvos pois, junto aos universos anti-de Sitter e de Minkowski, são os únicos que apresentam simetria máxima [1], o que se reflete na existência de um grupo de isometrias bem definido.

Vários trabalhos recentes têm tratado das equações de onda — equações da teoria quântica de campos — no universo de de Sitter. Gazeau et al [5] discutiram, via teoria de grupos, o campo escalar sem massa com acoplamento mínimo no universo de de Sitter obtendo uma formulação livre de qualquer divergência infra-vermelho. Gomes et al [7] discutiram a equação de Klein-Gordon no universo de Robertson-Walker, que contém o universo de de Sitter como um caso particular, também via teoria de grupos, e num outro trabalho Gomes e Capelas de Oliveira [6] discutiram os casos de freqüências positiva e negativa da solução da equação de Klein-Gordon.

O campo com espin 1/2 no universo de de Sitter foi discutido por Takook [10] através da analiticidade da complexificação da variedade pseudo-riemanniana associada ao universo de de Sitter. Empregando a metodologia da teoria de grupos, Notte Cuello e Capelas de Oliveira discutiram [8] a equação de Dirac e apresentaram sua solução no caso estacionário.

Neste trabalho são consideradas as equações de Dirac e Klein-Gordon generalizadas no universo de de Sitter. Estas equações são obtidas através do operador

[1] denilson@ccne.ufsm.br
[2] capelas@ime.unicamp.br

invariante de Casimir de segunda ordem associado ao grupo das isometrias do universo de de Sitter.

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na seção 2. apresentamos o universo de de Sitter e seu grupo de isometrias. Na seção 3. apresentamos a equação de Klein-Gordon generalizada e obtemos sua solução. Finalmente, na seção 4. consideramos a equação de Dirac generalizada, a qual é obtida fatorando o operador invariante de Casimir de segunda ordem num produto de dois operadores de primeira ordem, e obtemos sua solução.

2. O universo de de Sitter

O universo de Sitter é solução da equação de campo de Einstein em domínio de vácuo, sujeita à condição de isotropia e homogeneidade do espaço e pode ser vizualizado como um hiperbolóide de uma folha imerso num espaço pseudo euclidiano $\mathbb{R}_{(1,4)}$, [1]. Deste modo, escrevendo X^a as coordenadas e $\epsilon_a \delta_{ab}$ a métrica de $\mathbb{R}_{(1,4)}$, o universo de de Sitter é dado por

$$\sum_{ab=0}^{4} \epsilon_a \delta_{ab} X^a X^b = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 = -1, \tag{2.1}$$

onde $\epsilon_0 = 1$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = -1$. Denotamos, ainda, $\epsilon^a = 1/\epsilon_a$, evidentemente, $\epsilon^a = \epsilon_a$.

Dois sistemas de coordenadas admitidos pelo hiperbolóide acima são:

• **Coordenadas esféricas**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X^0 & = & \operatorname{senh} t \\ X^1 & = & \cosh t \operatorname{sen} x \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ X^2 & = & \cosh t \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ X^3 & = & \cosh t \operatorname{sen} x \cos\theta \\ X^4 & = & \cosh t \cos x \end{array} \right. , \tag{2.2}$$

onde $-\infty < t < \infty$ é a coordenada temporal, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta, x \leq \pi$ são as coordenadas espaciais.

• **Coordenadas estereográficas**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X^i & = & \dfrac{x^i}{\Phi}, \quad i = 0,1,2,3, \\ & & \\ X^4 & = & \dfrac{2-\Phi}{\Phi}, \end{array} \right. \tag{2.3}$$

onde $\Phi = 1 - \dfrac{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}{4}$, x^0 é a coordenada temporal, x^j, $j = 1,2,3$, são as coordenadas espaciais, e estas são tais que $\Phi > 0$.

De (2.1) decorre imediatamente que o grupo de Lie das isometrias do universo de de Sitter, denotado por $\mathrm{SO}_+(1,4)$, é a componente conexa do grupo pseudo ortogonal $\mathrm{O}(1,4)$, cujos geradores infinitesimais são dados por

$$J^{ab} = X^a P^b - X^b P^a, \tag{2.4}$$

onde $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$ e $a < b$ e escrevemos $P^a = \epsilon^a \dfrac{\partial}{\partial X^a}$. Assim, podemos escrever o operador invariante de Casimir de segunda ordem associado ao grupo $\mathrm{SO}_+(1,4)$ como

$$2\mathscr{C}_2 = \sum_{a,b,c,d=0}^{4} \epsilon_a \delta_{ac} \epsilon_b \delta_{bd} J^{ab} J^{cd}. \tag{2.5}$$

3. A Equação de Klein-Gordon generalizada

Obtemos a equação de Klein-Gordon generalizada no universo de de Sitter como a equação dos autovalores de $\mathscr{C}_2$, isto é, $\mathscr{C}_2 \psi = \lambda \psi$.

Em termos das coordenadas esféricas dadas em (2.2) e escrevendo[3] $\lambda = \left(\dfrac{m_0}{\hbar}\right)^2$, a equação de Klein-Gordon generalizada é escrita como

$$\begin{aligned} &\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3\frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\cosh^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \right. \\ &\left. \frac{1}{\cosh^2 t \operatorname{sen}^2 x}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right\}\psi = \left(\frac{m_0}{\hbar}\right)^2 \psi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\psi = \psi(t, x, \theta, \varphi) \to \mathbb{C}$ é uma função diferenciável, m_0 é a massa de repouso e $2\pi\hbar$ é a constante de Planck.

Evidentemente, esta é uma equação separável, assim escrevemos $\psi(t, x, \theta, \varphi) = T(t)R(x)S(\theta, \varphi)$ e separamos as partes angular, radial e temporal de (3.1)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) S(\theta,\varphi) = \lambda_1 S(\theta,\varphi), \tag{3.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}R(x) + (n-1)\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}R(x) + \frac{\lambda_1}{\operatorname{sen}^2 x}R(x) = \lambda_2 R(x), \tag{3.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}T(t) + n\frac{\operatorname{senh} t}{\cosh \tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) - \frac{\lambda_2}{\cosh^2 t}T(t) + m^2 T(t) = 0, \tag{3.4}$$

onde λ_1 e λ_2 são as constantes de separação e fizemos $m = m_0/h$.

[3] O autovalor λ é tomado desta forma em analogia com a equação clássica de Klein-Gordon. Observamos, ainda, que as coordenadas são escolhidas de modo que tenhamos $c = 1$, onde c é a velocidade da luz no vácuo.

As soluções regulares da parte angular são bem conhecidas [4], elas existem somente quando $\lambda_1 = -l(l+1)$ e podem ser tomadas como combinação linear do par

$$S_{\pm}(\theta, \varphi) = \mathrm{e}^{\pm ik\varphi} \operatorname{sen}\theta P_k^l(\cos\theta),$$

onde $k, l = 0, 1, 2, \ldots$, são tais que $k \leq l$ e $P_k^l(x)$ são os polinômios de Legendre.

3.1. A equação radial

Uma vez conhecida a solução da equação angular, passamos agora a considerar a equação (3.3). Introduzimos a mudança de variável independente $y = \cos x$ e a mudança de variável dependente $R(y) = (1-y^2)^l U(y)$, obtendo a seguinte equação

$$(1-y^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}U(y) - (2l+n)y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}U(y) - [l(l+n-1) + \lambda_2]U(y) = 0, \tag{3.5}$$

a qual pode ser identificada com a equação de Gegenbauer. Assim, escrevendo $\lambda_2 = -s(s+n-1)$, a solução regular em $-1 \leq y \leq 1$ é dada por

$$U(y) = C_{s-l}^{\frac{2l+n-1}{2}}(y),$$

com $s = 0, 1, 2, \cdots$ e $l \leq s$.

Finalmente, observando as mudanças de variáveis introduzidas anteriormente, a solução regular da chamada equação radial é dada por

$$R(x) = (\operatorname{sen} x)^l \, C_{s-l}^{\frac{2l+n-1}{2}}(\operatorname{sen} x), \tag{3.6}$$

com

$$\lambda_2 = -s(s+n-1), \quad s = 0, 1, 2, 3, \cdots \quad l \leq s. \tag{3.7}$$

3.2. A equação temporal

Consideramos agora a equação (3.4), chamada equação temporal. Introduzimos a mudança de variável dependente $T(t) = (\cosh t)^{\frac{1-n}{2}} U(t)$, e a mudança de variável independente $u = \operatorname{senh} t$, obtendo a equação

$$(1+u^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}U(u) + 2u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}U(u) + \frac{\mu^2}{1+u^2}U(u) + \frac{1-\nu^2}{4}U(u) = 0, \tag{3.8}$$

onde escrevemos $\mu = \frac{2s+n-1}{2}$ e $\nu = \sqrt{n^2 - 4m^2}$.

Introduzimos ainda as mudanças de variável dependente e variável independente, $U(u) = \left(\dfrac{u+i}{u-i}\right)^{\frac{\mu}{2}} V(u)$ e $z = \dfrac{1-iu}{2}$, e obtemos a seguinte equação diferencial

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}V(z) + (1+\mu-2z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z) - \frac{1-\nu^2}{4}V(z) = 0, \tag{3.9}$$

que pode ser identificada com a equação hipergeométrica. Portanto, uma solução pode ser dada em termos da função hipergeométrica na seguinte forma

$$V(z) = {}_2F_1\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}; 1+\mu; z\right). \tag{3.10}$$

Conseqüentemente,

$$U_+(u) = \left(\frac{u+i}{u-i}\right)^{\mu/2} {}_2F_1\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}; 1+\mu; \frac{1-iu}{2}\right) \tag{3.11}$$

é uma solução da equação diferencial (3.8). A partir da relação $\dfrac{u+i}{u-i} = \mathrm{e}^{2i\arctan u}$ e observando que (3.8) é invariante por conjugação complexa, segue que $U_-(u) = \overline{U_+(u)}$ é também sua solução. Assim, temos que o par

$$U_\pm(u) = \mathrm{e}^{\pm i\mu \arctan u} {}_2F_1\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}; 1+\mu; \frac{1\pm iu}{2}\right) \tag{3.12}$$

é base para solução geral da equação temporal. Estas soluções foram as mesmas obtidas em [2], e conforme observado, são análogas às soluções de freqüência positiva(U_+) e de freqüência negativa(U_-) da equação clássica de Klein-Gordon.

4. A equação de Dirac

A equação de Dirac generalizada no universo de de Sitter é obtida fatorando o operador de Casimir $\mathscr{C}_2$ num produto de dois operadores de primeira ordem. Para isto consideramos cinco matrizes complexas Γ_a de ordem 4 que satisfazem à equação

$$\Gamma_a\Gamma_b + \Gamma_b\Gamma_a = 2\epsilon_a\delta_{ab}\mathbb{1}. \tag{4.1}$$

Estas matrizes podem ser tomadas como

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma_j = \begin{bmatrix} -i\sigma_j & 0 \\ 0 & i\sigma_j \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & i\mathbb{1} \\ i\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade de ordem 2, $j = 1, 2, 3$, e σ_j são as chamadas matrizes de Pauli.

Consideremos $\mathfrak{S}^4$ o campo dos 4-espinores definidos no universo de de Sitter. Definimos o operador $\not{D} : \mathfrak{S}^4 \to \mathfrak{S}^4$ por

$$2\not{D} = \sum_{a,b=0}^{4} \Gamma_a\Gamma_b J^{ab}. \tag{4.3}$$

Valendo-se de (4.1), segue que $\mathbb{1}\mathscr{C}^2 = -\not{D}^2 + 3\not{D}$. Tomando $\lambda = m^2 + 3im$, onde $m = m_0/\hbar$, podemos escrever a equação $\mathscr{C}_2\Psi = \lambda\Psi$ como

$$(\not{D} + im - 3)\,(\not{D} - im)\,\Psi = 0.$$

A equação

$$(\not{D} - im)\,\Psi = 0 \tag{4.4}$$

é a chamada equação de Dirac generalizada no universo de de Sitter. Vale ressaltar que esta foi a equação proposta originalmente por Dirac [3] para a função de onda do elétron no universo de de Sitter[4].

Consideremos a equação de Dirac generalizada em termos das coordenadas estereográficas, dadas por (2.3). Introduzimos a seguinte mudança na variável dependente

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Phi^2}\left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\Gamma_4\Gamma_\mu x^\mu\right)\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix},$$

onde $\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{bmatrix}$. Denotamos $\mathfrak{m} = m + 2i$, assim podemos expressar a equação (4.4) como

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial x^0}\boldsymbol{\eta} + \sum\limits_{j=1}^{3}\sigma_j\dfrac{\partial}{\partial x^j}\boldsymbol{\eta} + \dfrac{i\mathfrak{m}}{\Phi}\boldsymbol{\xi} & = & 0, \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x^0}\boldsymbol{\xi} - \sum\limits_{j=1}^{3}\sigma_j\dfrac{\partial}{\partial x^j}\boldsymbol{\xi} + \dfrac{i\mathfrak{m}}{\Phi}\boldsymbol{\eta} & = & 0. \end{array}\right. \tag{4.5}$$

Introduzimos agora coordenadas esféricas na parte espacial desta equação $x^0 = \tau$, $x^1 = r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $x^2 = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $x^3 = r\cos\theta$, onde $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le r$. Temos ainda $\Phi = 1 - \dfrac{\tau^2 - r^2}{4} > 0$. Escrevemos $\boldsymbol{\eta} = \eta^0\boldsymbol{o} + \eta^1\boldsymbol{\iota}$ e $\boldsymbol{\xi} = \xi^0\boldsymbol{o} + \xi^1\boldsymbol{\iota}$, onde $\eta^A = \eta^A(\tau, r, \theta, \varphi)$, $\xi^A = \xi^A(\tau, r, \theta, \varphi)$, $A = 0, 1$ e $\{\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota}\}$ é a base dos espinores na esfera, dados por

$$\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-i\varphi/2}\cos\theta/2 \\ \mathrm{e}^{i\varphi/2}\,\mathrm{sen}\,\theta/2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\iota} = \begin{bmatrix} -\,\mathrm{e}^{-i\varphi/2}\,\mathrm{sen}\,\theta/2 \\ \mathrm{e}^{i\varphi/2}\cos\theta/2 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

e assim obtemos a seguinte expressão para a equação de Dirac generalizada

[4] Poderíamos ter tomado $(\not{D} + im - 3)\,\Psi = 0$ para a equação de Dirac generalizada, porém esta pode ser obtida de (4.4) fazendo $m \to m + 3i$.

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\eta^0-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\cot\theta}{2}\right)\eta^1+i\frac{\mathfrak{m}}{\Phi}\xi^0=0\\ \left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\eta^1-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\cot\theta}{2}\right)\eta^0+i\frac{\mathfrak{m}}{\Phi}\xi^1=0\\ \left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\xi^0+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\cot\theta}{2}\right)\xi^1+i\frac{\mathfrak{m}}{\Phi}\eta^0=0\\ \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\xi^1+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\cot\theta}{2}\right)\xi^0+i\frac{\mathfrak{m}}{\Phi}\eta^1=0\end{array}\right. . \tag{4.7}$$

Observemos inicialmente que a parte angular que comparece nesta equação recai nos operadores $\eth$ e $\overline{\eth}$ de levantamento e abaixamento de espin introduzidos em [9]. Visto que as funções ${}_{\pm 1/2}Y_{j,m}(\theta,\varphi)$, com $j=1/2,1,2,3/2,2,\ldots$, $m=-j,-j+1,\ldots j$, denominadas harmônicos esféricos com peso de espin $\pm 1/2$, formam um conjunto completo em relação ao produto interno $\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{S}^2} f\overline{g}\,\mathrm{d}S$ e satisfazem às seguintes equações

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\pm\frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\cot\theta}{2}\right){}_{\mp 1/2}Y_{j,m}(\theta,\varphi)=\mp(j+1/2)_{\pm 1/2}Y_{j,m}(\theta,\varphi),$$

tomamos a parte angular de ξ^0 e η^0 proporcionais a ${}_{+1/2}Y_{j,m}(\theta,\varphi)$ e a parte angular de ξ^1 e η^1 proporcionais a ${}_{-1/2}Y_{j,m}(\theta,\varphi)$, da seguinte forma

$$\begin{array}{lllllll}\xi^0&=&\Phi^{-3/2}f_0(r,\tau)_{+1/2}Y_{j,m}(\theta,\varphi), & \quad & \eta^0&=&\Phi^{-3/2}g_0(r,\tau)_{+1/2}Y_{j,m}(\theta,\varphi),\\ \xi^1&=&\Phi^{-3/2}f_1(r,\tau)_{-1/2}Y_{j,m}(\theta,\varphi), & & \eta^1&=&\Phi^{-3/2}g_1(r,\tau)_{-1/2}Y_{j,m}(\theta,\varphi).\end{array}$$

Com isso separamos a parte angular das partes radial e temporal.

É conveniente neste momento escrever a equação de Dirac generalizada nas coordenadas dadas em (2.2), comparando estas com as coordenadas estereográficas dadas em (2.3), temos $\Phi=\dfrac{2}{1+\cos x\cosh t}$, $r=\Phi\,\cosh t\operatorname{sen} x$, $\tau=\Phi\,\operatorname{senh} t$.

Definimos as funções:

$$\beta_\pm=\beta_\pm(x,t)=\frac{\cos x+\cosh t\pm\,\operatorname{sen} x\operatorname{senh} t}{1+\cos x\cosh t},\qquad \zeta=\zeta(x,t)=\frac{j+1/2}{\operatorname{sen} x\cosh t},$$

$$\gamma_\pm=\gamma_\pm(x,t)=\frac{3}{2}\frac{\operatorname{senh} t\pm\,\operatorname{sen} x\cosh t}{1+\cos x\cosh t}\mp\frac{1}{\operatorname{sen} x\cosh t},$$

$$\delta_\pm=\delta_\pm(x,t)=\frac{3\operatorname{senh} t\operatorname{sen} x\pm 2\cos x}{2\cosh t\operatorname{sen} x}.$$

Definimos, também, o par de operadores diferenciais $\mathscr{D}_\pm = \dfrac{\partial}{\partial t} \pm \dfrac{1}{\cosh t}\dfrac{\partial}{\partial x}$. Observamos as seguintes igualdades $\beta_+\beta_- = 1$ e $\mathscr{D}_\pm\sqrt{\beta_\pm} + \gamma_\mp\sqrt{\beta_\pm} = \delta_\pm\sqrt{\beta_\mp}$. Introduzimos, agora, a mudança de variável dependente

$$\sqrt{\beta_+}A_\pm = f_1 \pm g_0, \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\beta_-}B_\pm = f_0 \pm g_1 \tag{4.8}$$

na equação de Dirac generalizada, obtendo

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\mathscr{D}_+ + \delta_+)\,A_+ + \zeta B_+ + i\mathfrak{m}B_+ & = & 0 \\ (\mathscr{D}_- + \delta_-)\,B_+ - \zeta A_+ + i\mathfrak{m}A_+ & = & 0 \\ (\mathscr{D}_+ + \delta_+)\,A_- + \zeta B_- - i\mathfrak{m}B_- & = & 0 \\ (\mathscr{D}_- + \delta_-)\,B_- - \zeta A_- - i\mathfrak{m}A_- & = & 0 \end{array}\right. . \tag{4.9}$$

Observemos que a menos do sinal em $\mathfrak{m}$ o par de equações em A_+ e B_+ é idêntico ao par de equações em A_- e B_-, isto permite reduzir o problema a um sistema com apenas duas equações, o qual é tomado como sendo aquele em $+\mathfrak{m}$.

Para separar as partes espacial e temporal deste par de equções, introduzimos inicialmente a mudança de variável dependente

$$\begin{array}{lcl} A & \to & \mathrm{e}^{-i\mathfrak{m}t}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{-j+1/2}(\,\mathrm{sen}\,x)^{-1}(\cosh t)^{-3/2}A \\ B & \to & \mathrm{e}^{-i\mathfrak{m}t}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{-j+1/2}(\,\mathrm{sen}\,x)^{-1}(\cosh t)^{-3/2}B \end{array} . \tag{4.10}$$

Assim, podemos escrever a equação

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathscr{D}_+A - \zeta(A-B) + i\mathfrak{m}(B-A) & = & 0 \\ \mathscr{D}_-B - \zeta(A-B) + i\mathfrak{m}(A-B) & = & 0 \end{array}\right. . \tag{4.11}$$

Finalmente, tomando a mudança de variável dependente $X = A+B$, $Y = A-B$ e a mudança de variável independente $\tan u = \,\mathrm{senh}\,t$, obtemos o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial}{\partial u}X + \dfrac{\partial}{\partial x}Y - \dfrac{2j+1}{\mathrm{sen}\,x}Y & = & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}Y + \dfrac{\partial}{\partial x}X - \dfrac{2i\mathfrak{m}}{\cos u}Y & = & 0 \end{array}\right. . \tag{4.12}$$

Derivando a primeira das equações de (4.12) em relação a x e a segunda das equaçãoes em relação a u, igualando os termos da derivada mista de X destas duas equações, obtemos a equação diferencial parcial de segunda ordem

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y - \frac{\partial^2}{\partial u^2}Y - \frac{2j+1}{\mathrm{sen}\,x}\frac{\partial}{\partial x}Y + \frac{2i\mathfrak{m}}{\cos t}\frac{\partial}{\partial u}Y + (2j+1)\frac{\cos x}{\mathrm{sen}^{\,2}x}Y + 2i\mathfrak{m}\frac{\mathrm{sen}\,u}{\cos^2 u}Y = 0.$$

Vê-se de imediato que esta equação é separável. Então, escrevendo $Y(x,u) = R(x)U(u)$, obtemos os seguintes pares de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}R(x) - \frac{2j+1}{\operatorname{sen} x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}R(x) + \left[(2j+1)\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \lambda^2\right]R(x) = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}U(u) - \frac{2i\mathfrak{m}}{\cos u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}U(u) - \left(2i\mathfrak{m}\frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u} - \lambda^2\right)U(u) = 0, \tag{4.14}$$

onde λ^2 é a constante de separação.

As soluções deste par de equações serão consideradas a seguir. Observamos que, uma vez determinado $Y(x,u) = R(x)U(u)$, a função $X(x,u)$ que completa a solução de (4.12) é obtida por integração direta de $Y(x,u)$ e das condições iniciais que se impõem à equação.

4.1. Solução da equação espacial

Introduzimos a mudança de variável indepentente $y = \cos x$ e a mudança de variável dependente $R(y) = (1-y)^{j+1/2}(1+y)^{1/2}S(y)$ em (4.13), obtendo

$$(1-y^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}S(y) + [1 - y(2j+3)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}S(y) + [\lambda^2 - (j+1)^2]S(y) = 0. \tag{4.15}$$

As soluções da parte radial da equação de Dirac generalizada que procuramos estabelecer, são aquelas regulares em $x = 0$ e $x = \pi$, para isso devemos ter $S(y)$ regular em $y = \pm 1$, como (4.15) pode ser idenficada com a equação de Jacobi, cuja solução regular em $y = \pm 1$ é dada pelos polinômios de Jacobi, segue que $S(y) = P_n^{(j,j+1)}(y)$, $\lambda^2 = (n+j)^2$, onde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

4.2. A equação temporal

Introduzimos a mudança de variável dependente $U(u) = \cos u\ V(u)$ e a mudança de variável independente $v = \dfrac{1 + \operatorname{sen} u}{2}$ em (4.14), e obtemos a seguinte equação

$$v(1-v)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}V(v) + \left(\frac{3 - 2i\mathfrak{m}}{2} - 3v\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}V(v) - (1-\lambda^2)V(v) = 0,$$

a qual pode ser identificada com a equação hipergeométrica. Assim, temos que

$$V(v) = AV_1(v) + BV_2(v), \tag{4.16}$$

onde A, B são constantes e, denotando $\varsigma = 1/2 - i\mathfrak{m}$,

$$\begin{aligned} V_1(u) &= {}_2F_1\left(1+\lambda, 1-\lambda; 1+\varsigma; v\right) \\ V_2(u) &= \frac{1}{u^{\varsigma}}\,{}_2F_1\left(2+\lambda-\varsigma, 2-\lambda-\varsigma; 2-\varsigma; v\right) \end{aligned}, \tag{4.17}$$

é uma base para a solução geral da equação temporal. Para finalizar, observamos que as soluções dadas acima estão definidas quando $\mathfrak{m} \to -\mathfrak{m}$ e com isso podemos obter as funções $A_\pm$ e $B_\pm$ que são as soluções da equação de Dirac genralizada.

Abstract. We consider and discuss the Klein-Gordon and Dirac generalized equations in the de Sitter universe. These equations are obtained by means of second order Casimir invariant operator related to the de Sitter universe isometries groups, which is isomorphic to the 5-dimensional pseudo-rotation group.

Referências

[1] N.D. Birrel e P.C.W. Davies, "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[2] N.A. Chernikov e E.A. Tagirov, Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time, *Annales de L'Instnstitut Henri Poincaré*, **9** (1968), 109-141.

[3] P.A.M. Dirac, The electron wave equation in de Sitter space, *Annals of Mathematics*, (1935), 657.

[4] A. Erdelyi, "Higher Transcedental Function", Bateman Manuscript Project, vol. I, McGraw-Hill, New York, 1953.

[5] J.-P. Gazeau, J. Renaud e M.V. Takook, Gupta-Bleuler quantization for minimally coupled scalar fields in de Sitter space, *Class. Quantum Grav.*, **17** (2000), 1415-1434.

[6] D. Gomes e E. Capela de Oliveira, A equação de Klein-Gordon generalizada no universo de Robertson-Walker, in Seleta do XXIII CNMAC, Santos, SP, *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **2** (2001), 101-106.

[7] D. Gomes, E.A. Notte Cuello e E. Capela de Oliveira, A equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Robertson-Walker, in Seleta do XXIII CNMAC, Santos, SP, *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **1**, No.1 (2000), 101-110.

[8] E.A. Notte Cuello e E. Capela de Oliveira, Klein-Gordon and Dirac equations in the de Sitter spacetime, *International Journal of Theoretical Physics*, **38** (1999), 585-598.

[9] R. Penrose e W. Rindler, "Spinors and Space-Time", vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[10] M.V. Takook, Spin 1/2 field theory in the de Sitter space-time, (2000), e-print:**gr-qc**/0005077.