TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **4**, No. 2 (2003), 287-296.

Dinâmica Populacional do Vetor Transmissor da Dengue

H.M. YANG[1], C.P. FERREIRA[2], Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Cx.P. 6065, 13081-970 Campinas, SP, Brasil

S. TERNES[3], Embrapa Informática Agropecuária, Cx.P. 6041, 13083-886 Campinas, SP, Brasil.

Resumo. Estuda-se a dinâmica da população de mosquitos transmissor da dengue através de modelo matemático autônomo. Dependendo da hipótese admitida para a capacidade de oviposição, mostra-se a existência ou não de condições para a eliminação dos mosquitos por meio de controle aplicado na sua população.

1. Introdução

A dengue é causada por um arbovírus transmitido na natureza por artrópodos do gênero *Aedes*, descrita em diferentes partes do mundo. O mosquito *Aedes aegypti*, de ampla distribuição no Brasil e com hábito de picar durante o dia, é um dos mais eficientes transmissores da dengue por ser domiciliado. O *Aedes aegypti* foi erradicado do País pela primeira vez em 1955, tendo sido reintroduzido em 1967 e 1969. Foi eliminado novamente em 1973 e reapareceu na Bahia em 1976 e no Rio de Janeiro em 1977, espalhando a cada ano em número crescente em outros Estados ([3]), até mesmo no Estado de São Paulo que tem combatido o vetor constantemente.

A erradicação do mosquito (vetor) é, no momento, a estratégia adotada para prevenir as ocorrências de surtos de dengue, pois as vacinas contra dengue estão ainda em fase experimental. As medidas de controle incluem a utilização de produtos químicos e de recursos educacionais. O controle de mosquitos adultos é feito com inseticidas organofosforados e piretróides (fenitrothion para tratamentos perifocais) e malathion, fenitrothion ou cipermetrina para tratamentos espaciais. O controle de larvas (tratamentos focais) é feito com organofosforado temephos (abate) granulado a 1 % – concentração de uso de 1 *ppm* tem efeito larvicida de poder residual de 3 meses, após o qual deve-se reaplicá-lo (um dos pilares da estratégia de visitas bimestrais ou trimestrais). Finalmente, o controle da dengue pode ser feito através da

[1]hyunyang@ime.unicamp.br; apoio financeiro FAPESP e CNPq.
[2]pio@ime.unicamp.br; apoio financeiro FAPESP.
[3]sonia@cnptia.embrapa.br.

educação sanitária dirigida a toda comunidade e centrada na redução (pela remoção ou inviabilização) dos locais de procriação (ou criadouros) do vetor.

Desenvolve-se um modelo matemático para analisar a infestação de mosquitos em uma comunidade, tendo por objetivo o controle da dengue, cuja dinâmica é estudada em ([4]). Este modelo estuda os efeitos da capacidade de oviposição e da introdução de mecanismos de controle na dinâmica do vetor.

2. Dinâmica da população de mosquitos vetor

Para estudar a dinâmica da população de mosquitos, introduz-se a quantificação do fenômeno biológico, considerando-se o ciclo de vida do vetor *Aedes aegypti*.

Fase ovo. O número de ovos em cada instante de tempo é representado por $E(t)$. A quantidade de ovos aumenta com a taxa de oviposição das fêmeas adultas e o número de criadouros disponíveis, e diminui com a eclosão destes em larvas e a taxa de inviabilização. As taxas per-capitas de oviposição, de eclosão e de se tornarem inviáveis são designadas, respectivamente, por ϕ, σ_e e μ_e; em especial, σ_e^{-1} é o período médio de eclosão de ovos. A taxa *efetiva* de produção total de ovos é dada por $\varphi(W)\,(1 - E/C)$, onde $\varphi(W)$, que depende da taxa per-capita de oviposição ϕ e do número de fêmeas W, é a capacidade de produção de ovos de todas as fêmeas e $(1 - E/C)$ é a disponibilidade de criadouros para receber os ovos, com C sendo a capacidade total de criadouros. Os criadouros são de vários tipos e formas, variando desde os maiores como pequenos lagos e caixas d'água até menores como copinhos e tampinhas de garrafas. Assim, a capacidade total é dada por $C = \sum_{i=1}^{k} C_i$, onde $i = 1, 2, \cdots, k$, para k tipos estratificados de criadouros.

Fase larva. O número de larvas é representado por $L(t)$. A quantidade de larvas aumenta com a taxa de eclosão de ovos, e diminui com a transformação destas em pupas e a taxa de morte. As taxas per-capitas de transformação para a fase pupa e de mortalidade são designadas, respectivamente, por σ_l e μ_l; em especial, σ_l^{-1} é o período médio de transformação de larvas em pupas.

Fase pupa. O número de pupas é representado por $P(t)$. A quantidade de pupas aumenta com a taxa de transformação de larvas, e diminui com a eclosão (ou emergência) destes em mosquitos adultos e a taxa de morte. As taxas per-capitas de eclosão para a fase adulta e de mortalidade são designadas, respectivamente, por σ_p e μ_p; em especial, σ_p^{-1} é o período médio de eclosão de pupas.

Fase adulta. O número de mosquitos adultos (ou alados) fêmeas $W(t)$ aumenta com a taxa de eclosão (ou emergência) de pupas, e diminui com a taxa de morte. A taxa per-capita de mortalidade (de fêmeas) é designada por μ_w.

Os mecanismos de controle podem atuar em qualquer uma das quatro fases do vetor. Apresenta-se os três mecanismos de combate ao mosquito em uso pelas autoridades sanitárias (como a Superintendência de Controle de Endemias).

Controle mecânico. Este controle é feito pelos agentes de saúde pública no momento da visita e pelos moradores continuadamente, portanto, necessita de participação popular, consistindo na remoção ou inviabilização de criadouros. Quando se retira criadouros, no caso de conterem uma das fases aquáticas do mosquito, está-se eliminando todas as três fases aquáticas (ovo, larva e pupa). Assim, há eliminação de fração f_i, $i = 1, 2, \cdots, k$, de cada tipo estratificado de criadouros, sendo o total de criadouros removidos dado por $\sum_{i=1}^{k} f_i C_i$, e a capacidade remanescente fica $C' = \sum_{i=1}^{k} (1 - f_i) C_i$. Por outro lado, esta remoção está eliminando também ovos, larvas e pupas presentes em recipientes positivos, por isso assume-se que ocorra uma inviabilização adicional dada pelas taxas per-capitas m_e, m_l e m_p, que são, respectivamente, as taxas adicionais de mortalidade de ovos, larvas e pupas.

Controle químico larvicida. O impacto do controle de larvas por produtos químicos de longa duração pode ser medido pela morte de larvas. Assume-se uma mortalidade adicional tanto para larvas quanto para pupas, dadas por μ_l' e μ_p', que são, respectivamente, taxas adicionais de mortalidade de larvas e de pupas.

Controle químico adulticida. Existem duas formas de controle químico de mosquitos adultos. Pelo uso de equipamentos portáteis de aplicação de inseticidas (dentro das casas) e pelo uso de equipamentos pesados (pulverização nas ruas), este último descartado, exceto em casos de emergência (epidemias de dengue). A ação de inseticida, de curta duração, é induzir um acréscimo na mortalidade dado por μ_w', que é a taxa de mortalidade adicional de mosquitos adultos.

O balanço dos fluxos entre as quatro fases descreve a dinâmica da população de mosquitos. Assim, a dinâmica da população de mosquitos, na presença dos três mecanismos de controle do vetor, pode ser descrita por

$$\left\{\begin{array}{lcll} \frac{d}{dt}E(t) & = & \varphi(W)\left[1 - \frac{E(t)}{C'}\right] - \rho_e E(t), & \rho_e = \sigma_e + \mu_e + m_e, \\ \frac{d}{dt}L(t) & = & \sigma_e E(t) - \rho_l L(t), & \rho_l = \sigma_l + \mu_l + \mu_l' + m_l, \\ \frac{d}{dt}P(t) & = & \sigma_l L(t) - \rho_p P(t), & \rho_p = \sigma_p + \mu_p + \mu_p' + m_p, \\ \frac{d}{dt}W(t) & = & \sigma_p P(t) - \rho_w W(t), & \rho_w = \mu_w + \mu_w', \end{array}\right. \tag{2.1}$$

onde ρ_e, ρ_l, ρ_p e ρ_w são as taxas globais de saída, respectivamente, das fases ovo, larva, pupa e mosquito adulto. Estas taxas são tais que o seu inverso é o período médio de permanência em cada fase. Por exemplo, ρ_e^{-1} é o período médio de permanência na fase ovo, quando as saídas são a eclosão (σ_e), a inviabilização (μ_e) e a remoção por controle mecânico (m_e).

3. Análise do modelo – Capacidade de oviposição

Os parâmetros ϕ, σ_e, σ_l, σ_p, μ_e, μ_l, μ_p e μ_w dependem fortemente do meio-ambiente, ou seja, da temperatura, da umidade e dos fatores climáticos, enquanto o parâmetro C depende das condições sociais, demográficas e econômicas de uma comunidade, pois o mosquito tem habitat exclusivamente urbano. Para se obter resultados analíticos considera-se todos os parâmetros constantes no tempo e estuda-se o efeito da capacidade de oviposição $\varphi(W)$ na dinâmica dos mosquitos.

3.1. Controle intrínseco

Escolhe-se uma classe de funções que descreve uma população capaz de evitar os dois extremos desfavoráveis, que são a extinção e a explosão populacional. São as funções representadas por $\varphi(W) = \phi W^n$, com $0 < n < 1$, que controlam intrinsecamente a quantidade da população de mosquitos e exibem comportamento dinâmico semelhante. Dentre elas, escolhe-se uma função repesentativa dada por

$$\varphi(W) = \phi\sqrt{W}. \tag{3.1}$$

Para melhor compreensão, escreve-se como $\varphi(W) = \varphi'(W)W$, onde $\varphi'(W) = \phi/\sqrt{W}$ é a taxa de oviposição per-capita. Esta capacidade efetiva de oviposição aumenta com a diminuição do número de mosquitos adultos, enquanto que diminui com o aumento de W, mantendo a população em um valor finito. Note que para $n = 0$ tem-se um sistema dinâmico linear, cuja única solução não-trivial é estável.

Substituindo-se a equação (3.1) no sistema de equações (2.1), obtém-se sempre três pontos de equilíbrio. O equilíbrio trivial é dado pelos valores $E = 0$, $L = 0$, $P = 0$ e $W = 0$. Esta é a situação em que uma comunidade humana está livre da infestação de mosquitos.

Os outros dois pontos de equilíbrio não-triviais são obtidos da equação de segundo grau para o número de mosquitos adultos W dada por

$$W^2 - \left[2QC' + \left(\frac{QC'}{Q_0}\right)^2\right] W + (QC')^2 = 0, \tag{3.2}$$

onde as variáveis Q e Q_0 são dadas por

$$Q = \frac{\sigma_p}{\rho_p}\frac{\sigma_l}{\rho_l}\frac{\sigma_e}{\rho_w} \qquad e \qquad Q_0 = \frac{\phi}{\phi_{th}} = \frac{\sigma_e}{\rho_e} \times \frac{\sigma_l}{\rho_l} \times \frac{\sigma_p}{\rho_p} \times \frac{\phi}{\rho_w}, \tag{3.3}$$

com ϕ_{th}, a taxa de oviposição per-capita limiar, sendo dada por

$$\phi_{th} = \left(\frac{Q}{\rho_e}\right)^{-1} = \left(\frac{\sigma_e}{\rho_e}\frac{\sigma_l}{\rho_l}\frac{\sigma_p}{\rho_p}\frac{1}{\rho_w}\right)^{-1}. \tag{3.4}$$

Esta equação de segundo grau tem sempre duas soluções reais positivas não-nulas

$$W_\pm = QC'\left[1 + \frac{QC'}{2Q_0^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{QC'}{Q_0^2}\left(4 + \frac{QC'}{Q_0^2}\right)}\right], \tag{3.5}$$

onde W_+ e W_- são as soluções, respectivamente, maior e menor.

Os valores em equilíbrio para as outras três fases do ciclo de vida do vetor são

$$\left\{\begin{array}{lcl} E & = & \frac{W}{Q}, \\ L & = & \frac{\rho_p}{\sigma_p}\frac{\rho_w}{\sigma_l}W, \\ P & = & \frac{\rho_w}{\sigma_p}W, \end{array}\right. \tag{3.6}$$

calculados pela substituição com uma das soluções de W.

O parâmetro Q_0 tem a seguinte interpretação biológica. Os três primeiros termos do produto são a divisão entre $\rho_\bullet^{-1}$ e $\sigma_\bullet^{-1}$ para as fases ovo, larva e pupa. Note que $\sigma_\bullet^{-1}$ é o período de permanência em uma certa fase aquática até passar para fase seguinte, enquanto $\rho_{\bullet}^{-1}$ é o período de sobrevivência (englobando mudança de fase do ciclo vital, de mortalidade natural e mecanismos de controle) na fase aquática considerada. Assim, σ_e/ρ_e, por exemplo, é a probabilidade de um ovo sobreviver durante toda a fase do ovo e eclodir para a fase larva. O mesmo vale para outras duas razões. Em relação ao último termo, ρ_w^{-1} é o período de sobrevivência do mosquito adulto fêmea e ϕ é a taxa per-capita efetiva de oviposição; logo ϕ/ρ_w é o número médio de ovos que uma fêmea produz durante toda a sua vida. Logo, Q_0 é a probabilidade de um ovo sobreviver à fase ovo e eclodir para larva, e esta larva sobreviver à fase larva e passar para a fase pupa, e esta pupa sobreviver à fase pupa e eclodir para fase adulta e, então, este mosquito fêmea ovipor durante toda a fase alada. Assim, Q_0 mede número médio de descendentes fêmeas viáveis que um mosquito adulto fêmea produz durante todo o seu período fértil. Assim, quanto maior este valor, maior será a infestação da comunidade por mosquitos adultos.

A equação do segundo grau (3.2) para W tem os seguintes valores limites em relação à capacidade remanescente C'. Para $C' = 0$ tem-se um único ponto de equilíbrio trivial, pois as duas soluções da equação (3.5) são $W_+ = W_- = 0$. No outro extremo, para $C' \to \infty$, tem-se três pontos de equilíbrio: o equilíbrio trivial, o equilíbrio não-trivial finito $W_- = Q_0^2$ e o equilíbrio infinito $W_+ \to \infty$.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é restrita para o caso $C' \to \infty$. Para C' finito, a estabilidade dos pontos de equilíbrio não-triviais é feita numericamente. A estabilidade de um ponto de equilíbrio é dada pelo critério de Routh-Hurwitz, porém aplica-se uma conjectura deste critério para modelos epidemiológicos apresentada em [2]: se o termo independente da equação característica correspondente ao ponto de equilíbrio for positivo, então o ponto é estável.

Para o ponto de equilíbrio trivial, por causa do termo $\sqrt{W}$, não é possível utilizar a linearização do sistema em torno de equilíbrio. Porém, da primeira equação do sistema (2.1), com $\varphi(W) = \phi\sqrt{W}$, verifica-se que $\sqrt{W} \gg E$ ($= W/Q$ no equilíbrio) quando $W \approx 0$, resultando em $dE(t)/dt \sim \phi\sqrt{W}$. Assim, o ponto de equilíbrio trivial é globalmente instável.

Para o ponto de equilíbrio não-trivial dado por $W = Q_0^2$, a análise de sua estabilidade é dada pela linearização em torno de equilíbrio. A matriz Jacobiana correspondente ao sistema de equações (2.1), com a equação (3.1), dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\rho_e & 0 & 0 & \frac{\phi}{2\sqrt{W}} \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix}$$

calculada no ponto de equilíbrio, tem os auto-valores associados λ obtidos da solução da equação característica $\Lambda(\lambda)$ definida por

$$\Lambda(\lambda) = \det(J - \lambda I), \tag{3.7}$$

onde det é o valor do determinante de uma matriz e I é a matriz identidade 4×4. A equação característica pode ser desenvolvida, resultando em

$$\Lambda(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)\left(\rho_p + \lambda\right)(\rho_w + \lambda) - \sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{2Q_0} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superiores são positivos e o coeficiente de ordem zero (ou termo independente de λ), dado por

$$a_0 = \rho_e\rho_l\rho_p\rho_w - \sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{2Q_0} = \sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{2Q_0},$$

também é positivo, pois todos os parâmetros do modelo são positivos. Assim, o ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente estável.

Dinamicamente, todas as trajetórias dirigem-se para o ponto de equilíbrio não-trivial, exceto nas curvas dadas por separatrices, que podem convergir para o equilíbrio trivial. Para C' finito, pode-se fazer seguinte proposição (a partir de resultados numéricos). Os pontos de equilíbrio trivial ($W = 0$) e não-trivial de valor maior (W_+) são instáveis, enquanto o ponto de equilíbrio não-trivial de menor valor (W_-) é estável. Portanto, a dinâmica deste sistema de equações é evitar tanto a extinção ($W = 0$) quanto a explosão populacional (W_+) de mosquitos, mantendo a população de mosquitos sempre em valores razoáveis (W_-).

Esta hipótese de controle intrínseco da população por parte das fêmeas faz com que qualquer que seja a forma de controle, só é possível a eliminação da população de mosquitos se eliminar todos os recipientes criadouros de mosquitos ($C' = 0$), ou pela aplicação de controles perfeitos ($Q = 0$), conforme a equação (3.5).

3.2. Bilinearidade

A capacidade de oviposição das fêmeas $\varphi(W)$ depende linearmente da quantidade da população de mosquitos. Nesta situação, tem-se para oviposição a função

$$\varphi(W) = \phi W, \tag{3.8}$$

que exibe um comportamento dinâmico semelhante apresentado pelos sistemas epidêmicos bilineares, oriundos da lei da ação das massas ([2]).

Substituindo-se a equação (3.8) no sistema de equações (2.1), obtém-se dois pontos de equilíbrio. O equilíbrio trivial é dado pelos valores $E = 0$, $L = 0$, $P = 0$ e $W = 0$. O ponto de equilíbrio não-trivial é dado por

$$W = QC'\left(1 - \frac{1}{Q_0}\right) \tag{3.9}$$

e valores para outras três fases dados pela equação (3.6). Note que $W = 0$ se $Q_0 \leq 1$. Assim, a viabilidade biológica é dada pela condição $Q_0 > 1$.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é feita pela matriz Jacobiana correspondente ao sistema de equações (2.1), com a equação (3.8), dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\phi}{C'}W - \rho_e & 0 & 0 & \phi\left(1 - \frac{E}{C'}\right) \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix}$$

calculada no ponto de equilíbrio trivial (ou não-trivial). Para tanto, calcula-se os auto-valores associados λ da equação característica (3.7).

O ponto de equilíbrio trivial, com $W = 0$, tem a equação característica dada por

$$\Lambda(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \sigma_e\sigma_l\sigma_p\phi = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superiores são positivos e o coeficiente de ordem zero, dado por

$$a_0 = \rho_e\rho_l\rho_p\rho_w - \sigma_e\sigma_l\sigma_p\phi = \sigma_e\sigma_l\sigma_p\phi\left(\frac{1}{Q_0} - 1\right),$$

é positivo se, e somente se, $Q_0 < 1$. Assim, o ponto de equilíbrio trivial é localmente e assintoticamente estável se $Q_0 < 1$; caso contrário, é instável.

O ponto de equilíbrio não-trivial, com $E = W/Q$, tem a equação característica

$$\Lambda(\lambda) = \left[\phi Q\left(1 - \frac{1}{Q_0}\right) + \rho_e + \lambda\right](\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{Q_0} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superiores são positivos e o coeficiente de ordem zero, dado por

$$a_0 = \left[\phi Q\left(1 - \frac{1}{Q_0}\right) + \rho_e\right]\rho_l\rho_p\rho_w - \sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{Q_0} = \sigma_e\sigma_l\sigma_p\phi\left(1 - \frac{1}{Q_0}\right),$$

é positivo se, e somente se, $Q_0 > 1$. Assim, o ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente estável se $Q_0 > 1$; caso contrário, é instável.

Dinamicamente, todas as trajetórias dirigem-se ou para o ponto de equilíbrio trivial ou para o ponto de equilíbrio não-trivial, dependendo do valor de produção média de descendentes fêmeas viáveis Q_0. Independente da condição inicial, se $Q_0 < 1$, então a população de mosquitos vai para a extinção; enquanto que se $Q_0 > 1$, a população de mosquitos vai para o equilíbrio não-trivial.

Esta hipótese de oviposição faz com que surja uma outra possibilidade (além do caso anterior) para a eliminação da população de mosquitos: diminui-se a efetividade da procriação dos mosquitos por alguma forma de controle, tornando $Q_0 \leq 1$.

3.3. Dependência extrínseca

Escolhe-se uma classe de funções que descreve uma população necessitando de um número razoável de indivíduos para se manter, isto é, a persistência de infestação de mosquitos é reduzida quando a quantidade da população é pequena; contudo, para valores relativamente grandes, a infestação de mosquitos é certa e não controlável. Este é um exemplo típico de populações que procriam por acasalamento, pois a probabilidade de acasalamento aumenta com o aumento da quantidade da população. São as funções representadas por $\varphi(W) = \phi W^n$, com $n > 1$, que controlam extrinsecamente a população de mosquitos e exibem um comportamento dinâmico semelhante. Dentre elas, escolhe-se uma função representativa dada por

$$\varphi(W) = \phi W^2. \tag{3.10}$$

Para melhor compreensão, escreve-se como $\varphi(W) = \varphi'(W)W$, onde $\varphi'(W) = \phi W$ é a taxa de oviposição per-capita. Esta capacidade efetiva de oviposição sempre aumenta com o aumento do número de mosquitos adultos, sendo menor para valores pequenos de W. Os mosquitos *Aedes aegypti* precisam acasalar para ovipor.

Substituindo-se a equação (3.10) no sistema de equações (2.1), obtém-se até três pontos de equilíbrio. O equilíbrio trivial é dado por $E = 0$, $L = 0$, $P = 0$ e $W = 0$.

Os outros pontos de equilíbrio não-triviais são obtidos da equação de segundo grau para o número de mosquitos adultos W dada por

$$W^2 - QC'W + \frac{QC'}{Q_0} = 0, \tag{3.11}$$

onde Q e Q_0 são dadas pela equação (3.3). As soluções desta equação são tais que: 1) se $Q_0 < 4/QC'$ não há solução real; 2) se $Q_0 = 4/QC'$ há apenas a solução $W = QC'/2$; e 3) para $Q_0 > 4/QC'$ tem-se duas soluções reais positivas dadas por

$$W_\pm \quad = \quad \tfrac{QC'}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \tfrac{4}{Q_0 QC'}}\right), \tag{3.12}$$

onde W_+ e W_- são as soluções, respectivamente, maior e menor. Os valores para as outras fases do ciclo de vida do vetor são dados pela equação (3.6).

Dependendo do valor de Q_0 em relação ao valor limiar dado por

$$Q_{th} = 4/QC', \tag{3.13}$$

tem-se três situações: 1) para mosquitos pouco efetivos na procriação, quando $Q_0 < Q_{th}$, tem-se apenas um único ponto de equilíbrio dado pelo trivial; 2) para mosquitos parcialmente efetivos na procriação, com $Q_0 = Q_{th}$, tem-se dois pontos de equilíbrio, em que, além do trivial, surge outro não-trivial dado por $W = QC'/2$; e 3) para mosquitos bastante efetivos na procriação, quando $Q_0 > Q_{th}$, tem-se três pontos de equilíbrio, em que, além do trivial, surgem dois não-triviais dados pela equação (3.12), que são dois ramos que surgem do mesmo valor $W_+ = W_- = QC'/2$. Note que W_+ é o ramo estritamente crescente e W_- é o ramo estritamente decrescente a partir do valor comum $W_+ = W_- = QC'/2$.

A equação do segundo grau (3.11) para W tem os seguintes valores limites em relação à capacidade remanescente C'. Para $C' = 0$ tem-se um único ponto de equilíbrio trivial, pois as duas soluções da equação (3.12) são $W_+ = W_- = 0$. No outro extremo, para $C' \to \infty$, tem-se três pontos de equilíbrio: o equilíbrio trivial, o equilíbrio não-trivial finito $W_- = 1/Q_0$ e o equilíbrio infinito $W_+ \to \infty$.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é restrita para o caso $C' \to \infty$. Para C' finito, a estabilidade do equilíbrio não-trivial é feita numericamente.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é feita pela matriz Jacobiana correspondente ao sistema de equações (2.1), com a equação (3.10), dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\rho_e & 0 & 0 & 2\phi W \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix}$$

calculada no ponto de equilíbrio trivial (ou não-trivial). Para tanto calcula-se os auto-valores associados λ da equação característica (3.7).

O ponto de equilíbrio trivial, com $W = 0$, tem os auto-valores dados por

$$\begin{cases} \lambda_1 &= -\rho_e, \\ \lambda_2 &= -\rho_l, \\ \lambda_3 &= -\rho_p, \\ \lambda_4 &= -\rho_w. \end{cases}$$

Como todos os auto-valores são negativos, o ponto de equilíbrio trivial é localmente e assintoticamente estável.

O ponto de equilíbrio não-trivial, com $W = 1/Q_0$, tem a equação característica

$$\Lambda(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)\left(\rho_p + \lambda\right)(\rho_w + \lambda) - 2\sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{Q_0} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superiores são positivos e o coeficiente de ordem zero, dado por

$$a_0 = \rho_e\rho_l\rho_p\rho_w - 2\sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{Q_0} = -\sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{Q_0},$$

é negativo, pois todos os parâmetros do modelo são positivos. Assim, o ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente instável.

Dinamicamente, todas as trajetórias dirigem-se ou para o ponto de equilíbrio trivial ou para o ponto de equilíbrio não-trivial infinito (W_+, quando $C' \to \infty$). Para C' finito, pode-se fazer seguinte proposição (de resultados numéricos). Os pontos de equilíbrio trivial ($W = 0$) e não-trivial de valor maior (W_+) são estáveis, enquanto o ponto de equilíbrio não-trivial de menor valor (W_-) é instável. Portanto, a dinâmica deste sistema de equações é levar a população para a sua extinção ($W = 0$) ou para a explosão populacional (W_+) de mosquitos, dependendo do valor inicial considerado para as quatro fases do ciclo de vida. Como a população de mosquitos em valores razoáveis (W_-) é sempre instável, este ponto de equilíbrio é o "breaking point" (valor de variáveis de estado que separa as duas regiões de atração).

Esta hipótese de controle extrínseco da população por parte das fêmeas faz com que a possibilidade para eliminar a população de mosquitos surja quando se diminui a efetividade dos mosquitos na procriação por alguma forma de controle, tornando $Q_0 \leq Q_{th}$. Neste caso, a erradicação do vetor pode ser obtida, além de diminuir o valor de Q (como no caso anterior, pois $Q_0 = Q\phi/\rho_e$) por controles químicos, diminuindo-se também o valor de C por controle mecânico.

4. Conclusão

Os mosquitos da dengue, uma vez re-introduzidos no Brasil, têm aumentado o seu número como conseqüência do modo de vida das comunidades que criam um número muito grande de criadouros e, assim, têm infestado cada vez mais cidades devido à malha rodoviária que facilita tanto a mobilidade das pessoas quanto o comércio. Como resultado, têm resistido a intensos e continuados mecanismos de controle. Procurou-se entender este fenômeno através da análise de um modelo matemático simples, considerando-se diferentes capacidades de oviposição das fêmeas.

Atualmente, aplicações de intensos mecanismos de controle não estão surtindo os efeitos esperados, pois, diferentemente das décadas de 50 e 70, a sociedade produz toda sorte de criadouros como lixo urbano (aumentando a capacidade do meio C). Além da dificuldade na remoção e inviabilização dos criadouros, a capacidade de evasão e perpetuação dos mosquitos aos mecanismos de controle pode ser explicada de duas outras maneiras, quando o seu número diminui: pelo aumento da capacidade de oviposição (função $\varphi(W)$ assumindo a forma de controle intrínseco da população pela diminuição de competição intra-populacional) ou pela elevada capacidade de geração de fêmeas viáveis (aumentando-se Q_0). A adaptabilidade do mosquito com o meio-ambiente hostil pode ser analisada por um modelo não-autônomo simples: basta permitir a potência n da função de oviposição variar com tempo.

Mostrou-se que as três formas de controle da população de mosquitos da dengue podem ser aplicadas para eliminar, ou não, a sua população. Estas considerações foram obtidas de resultados analíticos oriundos de modelo matemático muito simples, sem nenhuma dependência com as variações climáticas. Por exemplo, o número médio de descendentes fêmeas que um mosquito adulto fêmea produz é um importante parâmetro de controle. Contudo, a importância de resultados analíticos é fornecer subsídios para compreender e interpretar melhor os resultados oriundos de modelo não-autônomo (parâmetros do modelo variando com o tempo), [1].

Abstract. The effects of controlling mechanism applied to the mosquito population transmitting dengue are assessed by autonomous mathematical model. There is or not the elimination conditions depending on the hypotheses related to the offspring capacity of the female mosquitos.

Referências

[1] C.P. Ferreira e H.M. Yang, Estudo dinâmico da população de mosquitos *Aedes aegypti*, em "Seleta do XXV CNMAC" (E.X.L. Andrade et al., eds.), *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, **4**, No. 2 (2003), 187-196.

[2] M.B.F. Leite, R.C. Bassanezi e H.M. Yang, The basic reproduction ratio for a model of directly transmitted infections considering the virus charge and the immunological response, *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.*, **17**, No. 1 (2000), 15-31.

[3] R. Veronesi, "Doenças Infecciosas e Parasitárias", Oitava Edição, Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1991.

[4] H.M. Yang, Epidemiologia da transmissão da dengue, em "Seleta do XXV CNMAC" (E.X.L. Andrade et al., eds.), *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, **4**, No. 3 (2003), no prelo.