

Coloração Total do C_n^2

C.N. CAMPOS¹, C.P. de MELLO², Instituto de Computação, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.

Resumo. O número cromático total é o menor número de cores necessárias para colorir as arestas e os vértices de um grafo de maneira que não haja elementos adjacentes ou incidentes que recebam a mesma cor. Neste artigo mostramos que o número cromático total do C_n^2 , $n \geq 6$, é $\Delta + 1$ se $n \neq 7$ e $\Delta + 2$ se $n = 7$.

1. Introdução

Seja $G := (V(G), E(G))$ um grafo simples com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. O grau de um vértice v , $d(v)$, é o número de arestas incidentes neste vértice e $\Delta(G)$ (ou simplesmente Δ quando estiver claro no contexto) denota o grau máximo de G , isto é, $\Delta := \max_{v \in V(G)} \{d(v)\}$. Um *elemento* de G é um vértice ou uma aresta de G .

Seja $S := V(G) \cup E(G)$. Uma *coloração total* de G é um mapeamento $\phi : S \rightarrow \mathcal{C}$, tal que para todo $x, y \in S$, onde x e y são dois elementos adjacentes ou incidentes, tem-se que $\phi(x) \neq \phi(y)$. Quando um mapeamento não satisfaz esta condição, dizemos que há *conflito*. Note que, se $S = V(G)$, temos uma *coloração de vértices* de G e, se $S = E(G)$, temos uma *coloração de arestas* de G .

O conjunto \mathcal{C} é denominado *conjunto de cores*. Uma coloração total para a qual $|\mathcal{C}| = k$ é denominada *k-coloração total*. Seja $c \in \mathcal{C}$. O conjunto $\{x \in V(G) \cup E(G) : \phi(x) = c\}$ é denominado uma *classe de coloração* de G . Assim, ϕ possui k classes de coloração. Dizemos também que ϕ *usa* k cores. Em um elemento x de G *falta* a cor c quando $\phi(x) \neq c$ e nenhum elemento incidente em ou adjacente a x possui a cor c .

O *número cromático total* de G , $\chi_T(G)$, é o menor inteiro k para o qual G admite uma k -coloração total. É fácil mostrar que $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$. Sánchez-Arroyo [14] provou que decidir se $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ para um dado grafo G é um problema **NP**-completo. McDiarmid e Sánchez-Arroyo [13] provaram que mesmo o problema de determinar o número cromático total de um grafo bipartido k -regular é **NP**-difícil para cada k fixo ≥ 3 .

Behzad [2] e Vizing [15, 16] estabeleceram, em trabalhos independentes, a *conjectura da coloração total (TCC)*, que diz que para qualquer grafo simples G ,

¹campos@ic.unicamp.br

²celia@ic.unicamp.br

$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. Se $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$, G é dito *tipo 1* e se $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$, é dito *tipo 2*.

Um grafo é uma *potência de ciclo*, C_n^k , se $V := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e $E := E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^k$, onde

$$E^i := \{(v_j, v_{(j+i) \bmod n}) : 0 \leq j \leq n-1\}.$$

Uma aresta $e \in E^i$ é dita uma aresta de *alcance* i . Neste texto trabalhamos com $k = 2$ (C_n^2). A Figura 1 exhibe o C_6^2 , um exemplo de grafo nesta família.

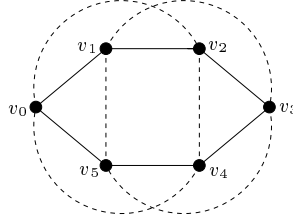


Figura 1: Grafo C_6^2 pertencente à família dos C_n^2 . As arestas cheias são as arestas de E^1 e as arestas tracejadas de E^2 .

Behzad et al [3] provaram que os grafos completos de ordem ímpar são tipo 1 e os de ordem par, tipo 2. Kostochka [12] provou que multigrafos G com $\Delta(G) = 4$ satisfazem a TCC. Zhang et al [19] provaram que os grafos de Halin com $\Delta = 4$ são tipo 1. Resultados mais recentes em coloração total podem ser encontrados em [1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 17], entre outros. Este trabalho determina o número cromático total do C_n^2 , $n \geq 6$, que são grafos simples, não isomorfos ao K_n e 4- regulares. A Seção 2. determina o número cromático total de C_n^2 , com $n \geq 6$ e $n \neq 7$, mostrando que estes são tipo 1, e a Seção 3. determina o número cromático total do C_7^2 , que é tipo 2.

2. Coloração total do C_n^2 , $n \neq 7$

Nesta seção, demonstramos que os grafos C_n^2 , com $n \geq 6$ e $n \neq 7$ são tipo 1. Para isso, exibiremos uma $(\Delta + 1)$ -coloração total para os grafos desta classe.

Sejam G_1 e G_2 dois grafos nesta classe. Seja $\{v_0^i, \dots, v_{n_i-1}^i\}$ o conjunto de vértices de G_i , para $i = 1, 2$. Sejam $v_i^1 \in V(G_1)$ e $v_j^2 \in V(G_2)$ dois vértices quaisquer. O grafo G , resultante da *colagem* de G_1 e G_2 , é definido como

$$V(G) := (V(G_1) \cup V(G_2)) \setminus \{v_i^1, v_j^2\} \tag{2.1}$$

$$E(G) := (E(G_1) \cup E(G_2) \cup E_{in}) \setminus E_{out} \tag{2.2}$$

onde

$$E_{in} := \{(v_{i-2}^1, v_{j+1}^2), (v_{i-1}^1, v_{j+2}^2), (v_{i-1}^1, v_{j+1}^2), (v_{i+2}^1, v_{j-1}^2), (v_{i+1}^1, v_{j-2}^2), (v_{i+1}^1, v_{j-1}^2)\}$$

$$e \quad E_{out} := \{(v_{i-2}^1, v_i^1), (v_{i-1}^1, v_i^1), (v_i^1, v_{i+1}^1), (v_i^1, v_{i+2}^1), (v_{i-1}^1, v_{i+1}^1), \\ (v_{j-2}^2, v_j^2), (v_{j-1}^2, v_j^2), (v_j^2, v_{j+1}^2), (v_j^2, v_{j+2}^2), (v_{j-1}^2, v_{j+1}^2)\}.$$

Os grafos G_1 e G_2 são ditos *geradores* e os vértices v_i^1 e v_j^2 são ditos *pivôs* da operação de colagem. Note que o grafo G possui $n_1 + n_2 - 2$ vértices. A Figura 2 ilustra a operação de colagem de G_1 e G_2 .

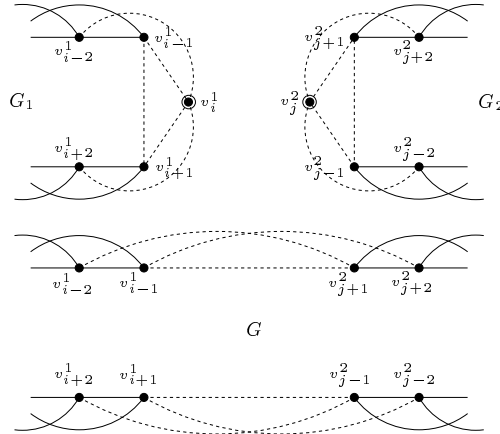


Figura 2: Ilustração da operação de colagem: as arestas tracejadas na primeira figura são removidas (E_{out}) juntamente com os vértices marcados e as arestas tracejadas na segunda figura são introduzidas (E_{in}).

Para facilitar a notação consideraremos que as operações de colagem são feitas tendo como pivôs os vértices v_0^1 e v_0^2 . Ademais, renomearemos os vértices de G da seguinte forma

$$v_l := v_{l+1}^1 \quad \text{para } l := 0, \dots, n_1 - 2, \quad (2.3)$$

$$v_{l+n_1-1} := v_{l+1}^2 \quad \text{para } l := 0, \dots, n_2 - 2. \quad (2.4)$$

Desta forma, temos que o conjunto de vértices de G é dado por $\{v_0, \dots, v_{n_1+n_2-3}\}$. A Figura 3 mostra como ficam os vértices do grafo G após a renomeação.

O lema a seguir estabelece que o grafo obtido pela operação de colagem a partir de dois grafos pertencentes à classe dos C_n^2 é um grafo pertencente a esta classe.

Lema 2.1. *O grafo G obtido pela colagem de dois grafos, G_1 e G_2 , pertencentes à classe dos C_n^2 , também é um grafo pertencente a esta classe.*

Demonstração. Uma simples verificação mostra que o grafo G , obtido pela operação de colagem de G_1 e G_2 , é 4-regular. Ademais, é possível particionar as arestas de G em E^1 e E^2 conforme a definição de potências de ciclo. Uma forma simples de verificar isto é utilizar a renomeação das arestas definida (2.3) e (2.4), observando que as arestas que não foram removidas permanecem com seus alcances

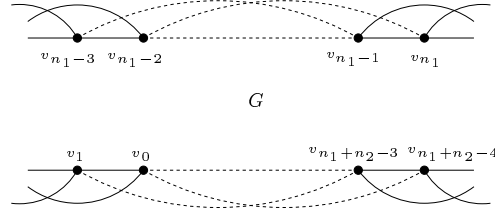


Figura 3: Grafo G após a renomeação dos seus vértices especificada em (2.3) e (2.4).

inalterados e as arestas acrescentadas possuem alcance 1 ou 2. Finalmente, por contagem, concluímos que $|E^1| = |E^2| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 2 = |V(G)|$, concluindo a demonstração. \square

O seguinte lema define uma maneira recursiva de construir potências de ciclo utilizando a operação de colagem.

Lema 2.2. *O grafo C_n^2 pode ser gerado a partir da colagem do C_6^2 e do C_{n-4}^2 para todo $n \geq 10$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.1, sabemos que o grafo gerado pela colagem de duas potências de ciclo é uma potência de ciclo. Além disso, a colagem do C_{n-4}^2 com o C_6^2 possui $n - 4 + 6 - 2 = n$ vértices.

Por outro lado, as potências de ciclo que estamos considerando possuem pelo menos 6 vértices, assim, temos que $n - 4 \geq 6$. Logo, $n \geq 10$. \square

Denominaremos os grafos C_6^2 , C_8^2 , C_9^2 e C_{11}^2 *grafos básicos*. O Teorema 2.1 mostra que todo C_n^2 , $n \geq 6$ e $n \neq 7$ é tipo 1. A demonstração é indutiva e utiliza a colagem do C_6^2 e do C_{n-4}^2 , ambos com uma $(\Delta + 1)$ -coloração total. Os grafos básicos formam a base desta indução. A inclusão do C_{11}^2 na base vem do fato de que teríamos que construí-lo usando o C_7^2 , mas este é o único grafo que não é tipo 1. Uma $(\Delta + 1)$ -coloração total para cada grafo básico é exibida nas Figuras 4(a) a 4(d).

Seja π uma coloração total do C_n^2 . Um vértice $v_i \in V(C_n^2)$ é dito *especial* quando

$$\pi(v_i) = \pi((v_{(i-1) \bmod n}, v_{(i+1) \bmod n})).$$

O vértice v_i e a aresta $(v_{(i-1) \bmod n}, v_{(i+1) \bmod n})$ são ditos *equivalentes*. Note que a propriedade de um vértice ser especial está relacionada com uma coloração total. Uma coloração total em que todos os vértices são especiais é denominada *coloração total especial*. As colorações totais exibidas nas Figuras 4(a), 4(b), 4(c) e 4(d) são especiais.

Teorema 2.1. *Todo C_n^2 com $n \geq 6$ e $n \neq 7$ é tipo 1. Ademais, existe uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial para todo grafo nesta classe.*

Demonstração. As Figuras 4(a), 4(b), 4(c) e 4(d) exibem uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial para os grafos básicos. Isto é suficiente para mostrar que estes grafos são tipo 1.

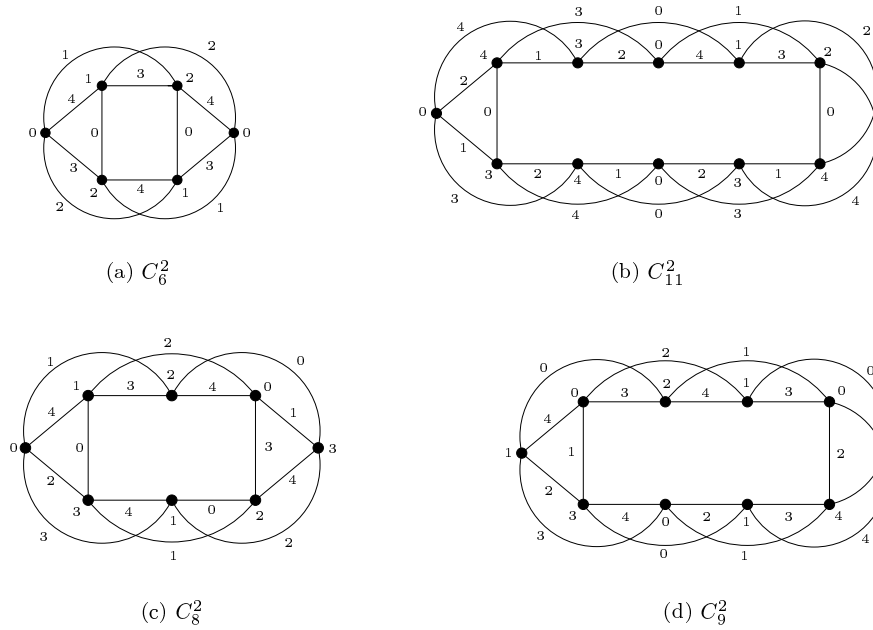


Figura 4: $(\Delta + 1)$ -coloração total dos grafos básicos.

A demonstração de que o C_n^2 , $n \geq 10$ e $n \neq 11$, é tipo 1 é indutiva. Suporemos que o grafo C_{n-4}^2 possui uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial. Faremos a colagem do C_6^2 com o C_{n-4}^2 , onde o C_6^2 corresponde ao grafo G_1 e o C_{n-4}^2 ao grafo G_2 na Figura 2, e mostraremos como estender as colorações originais para uma 5-coloração total especial do C_n^2 .

Seja π_1 a coloração do C_6^2 exibida na Figura 4(a). Ajuste a notação para que $\pi_1(v_0) = 0$, $\pi_1(v_1) = 1$ e $\pi_1((v_0, v_1)) = 3$. Seja $\pi_2 : V(C_{n-4}^2) \cup E(C_{n-4}^2) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ uma $(\Delta + 1)$ -coloração total especial para o grafo C_{n-4}^2 . Suponha, sem perda de generalidade, que $\pi_2(v_0) = 0$. Por hipótese, este vértice é especial, então $\pi_2(v_1, v_{n-5}) = 0$. Como o grafo é 4-regular, as cores 1, 2, 3 e 4 incidem em v_0 . Ajuste a notação para que estas cores estejam distribuídas da seguinte forma:

$$\pi_2((v_0, v_1)) = 2, \quad \pi_2((v_0, v_2)) = 4, \quad \pi_2((v_{n-6}, v_0)) = 3, \quad \pi_2((v_{n-5}, v_0)) = 1.$$

Como todos os vértices são especiais esta distribuição de cores implica que $\pi_2(v_1) = 4$, $\pi_2(v_{n-5}) = 3$, $\pi_2(v_2) \in \{1, 3\}$ e $\pi_2(v_{n-6}) \in \{2, 4\}$.

Gerar o C_n^2 a partir do C_6^2 e C_{n-4}^2 implica em remover as arestas do conjunto E_{out} em (2.2) juntamente com os pivôs e *colar* os dois grafos geradores sem estas arestas, adicionando as seis novas arestas do conjunto E_{in} de (2.2). Sendo assim, exceto pelos elementos em E_{in} , cada elemento do C_n^2 corresponde a algum elemento (colorido) de um dos seus geradores.

Seja x um elemento de C_n^2 que não pertence a E_{in} . Vamos considerar a cor de x em C_n^2 como sendo a cor que o elemento correspondente a x possui no grafo gerador. Desta forma, os únicos elementos do C_n^2 sem cores atribuídas são as seis arestas de E_{in} , que receberão uma nova cor. Formalmente, definimos π , uma atribuição de cores para o C_n^2 , da seguinte forma:

$$\pi(v_i) := \pi_1(v_{i+1}), \quad \text{para } i := 0, \dots, 4, \quad (2.5)$$

$$\pi(v_{i+5}) := \pi_2(v_{i+1}), \quad \text{para } i := 0, \dots, n-6, \quad (2.6)$$

$$\pi((v_i, v_{i+1})) := \pi_1((v_{i+1}, v_{i+2})), \quad \text{para } i := 0, 1, 2, 3, \quad (2.7)$$

$$\pi((v_{i+5}, v_{i+6})) := \pi_2((v_{i+1}, v_{i+2})), \quad \text{para } i := 0, \dots, n-7, \quad (2.8)$$

$$\pi((v_i, v_{i+2})) := \pi_1(v_{i+1}, v_{i+3}), \quad \text{para } i := 0, 1, 2, \quad (2.9)$$

$$\pi((v_{i+5}, v_{i+7})) := \pi_2(v_{i+1}, v_{i+3}), \quad \text{para } i := 0, \dots, n-8. \quad (2.10)$$

As próximas seis arestas são as arestas de E_{in}

$$\pi((v_3, v_5)) := 2,$$

$$\pi((v_4, v_5)) := 0,$$

$$\pi((v_4, v_6)) := 4,$$

$$\pi((v_{n-2}, v_0)) := 3,$$

$$\pi((v_{n-1}, v_0)) := 0,$$

$$\pi((v_{n-1}, v_1)) := 1.$$

Vamos mostrar que π é uma $(\Delta + 1)$ -coloração total para o C_n^2 . As colorações π_1 e π_2 são $(\Delta + 1)$ -colorações totais para os grafos C_6^2 e C_{n-4}^2 , respectivamente. Os vértices e arestas correspondentes aos vértices e arestas do C_6^2 possuem as mesmas cores de π_1 . Concluimos que $\pi|_{\pi_1}$, isto é (2.5), (2.7) e (2.9), não possui conflito. Analogamente, concluimos que não há conflito em $\pi|_{\pi_2}$.

Por construção de π , os extremos das arestas de E_{in} recebem as cores

$$\pi(v_0) := \pi_1(v_1) = 1,$$

$$\pi(v_1) := \pi_1(v_2) = 2,$$

$$\pi(v_3) := \pi_1(v_4) = 1,$$

$$\pi(v_4) := \pi_1(v_5) = 2,$$

$$\pi(v_5) := \pi_2(v_1) = 4,$$

$$\pi(v_6) := \pi_2(v_2) \in \{1, 3\},$$

$$\pi(v_{n-2}) := \pi_2(v_{n-6}) \in \{2, 4\},$$

$$\pi(v_{n-1}) := \pi_2(v_{n-5}) = 3.$$

Portanto, ao adicionarmos as arestas de E_{in} não ligamos dois vértices que possuem a mesma cor. Desta forma, não há conflito em π de (2.5) a (2.10).

Precisamos agora mostrar que as cores atribuídas às arestas de E_{in} não geram conflito. As arestas de E_{out} foram removidas e cada uma delas tinha uma cor atribuída. Logo, esta cor falta nos vértices que são extremos destas arestas no C_n^2 . Então,

em v_0	faltam as cores	0 e 3,
em v_1	falta a cor	1,
em v_3	falta a cor	2,
em v_4	faltam as cores	0 e 4,
em v_5	faltam as cores	0 e 2,
em v_6	falta a cor	4,
em v_{n-2}	falta a cor	3 e
em v_{n-1}	faltam as cores	0 e 1.

Portanto, as cores atribuídas às arestas de E_{in} não geram conflito.

Para completar a demonstração precisamos garantir que a coloração total obtida para o C_n^2 é especial. Por construção, as colorações totais dos grafos básicos são especiais. Pela hipótese de indução, a coloração total do C_{n-4}^2 é especial. Como as cores de vértices e arestas fora de E_{in} receberam cores de π_1 e π_2 , que possuem a propriedade de todos os vértices serem especiais, basta analisar as arestas de alcance 2 de E_{in} e os seus vértices equivalentes. Ou seja, basta analisar o conjunto $E^2 \cap E_{in} = \{(v_3, v_5), (v_4, v_6), (v_{n-2}, v_0), (v_{n-1}, v_1)\}$. Por construção, $\pi(v_0) = \pi((v_{n-1}, v_1)) = 1$, $\pi(v_4) = \pi((v_3, v_5)) = 2$, $\pi(v_5) = \pi((v_4, v_6)) = 4$ e $\pi(v_{n-1}) = \pi((v_{n-2}, v_0)) = 3$. Portanto, estes vértices também são especiais. Concluímos que todos os vértices do C_n^2 são especiais e a demonstração está completa. \square

3. Coloração total do C_7^2

Nesta seção, demonstramos que o C_7^2 é tipo 2. Inicialmente, introduzimos algumas definições e resultados existentes que são utilizados para mostrar que não existe uma $(\Delta + 1)$ -coloração total para o C_7^2 .

Definimos a *deficiência de G* , $def(G)$, como

$$def(G) := \sum_{v \in V(G)} (\Delta - d(v)).$$

Seja π uma $(\Delta + 1)$ -coloração dos vértices de G . Seja r o número de classes de coloração de π cujo tamanho tem a mesma paridade de $|V(G)|$. Se

$$def(G) \geq \Delta + 1 - r,$$

dizemos que esta coloração de vértices é *harmônica*³. Se G possui alguma coloração de vértices harmônica, dizemos que G é *harmônico*. O Lema 3.1 foi demonstrado por Chetwynd e Hilton em [5]. O Lema 3.2 segue da definição de grafo harmônico.

Lema 3.1. *Se G é um grafo tipo 1, então G é harmônico.*

Lema 3.2. *Seja G um grafo regular e harmônico. A cardinalidade de cada classe de coloração de uma coloração de vértices harmônica tem a mesma paridade de $|V(G)|$.*

³Em inglês o termo é *conformable*.

O lema a seguir é fundamental na determinação do número cromático total do C_7^2 . Note que $k < \lfloor n/2 \rfloor$ implica que o grafo C_n^k é simples e não isomorfo ao K_n .

Lema 3.3. *Seja $G := C_n^k$ com n ímpar e $k < \lfloor n/2 \rfloor$. Se G é harmônico, então $k \leq n/3 - 1$.*

Demonstração. Se o grafo G é harmônico, possui uma coloração de vértices harmônica π . Ademais, o grafo G é regular. Pelo Lema 3.2, cada classe de coloração de π tem a mesma paridade de $|V(G)|$, que é ímpar. Portanto, concluímos que toda cor de π aparece em pelo menos um vértice.

Por hipótese, $k < \lfloor n/2 \rfloor$ e n é ímpar. Assim, $n > 2k + 1$. Como o grafo G possui $\Delta = 2k$, π usa $2k + 1$ cores. Além disso, a paridade de cada classe de coloração é ímpar. Então, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos uma classe de coloração possui pelo menos três vértices.

Sejam v_i, v_j e v_l três vértices coloridos com a mesma cor. Ajuste a notação para que $i \leq j \leq l$. Por construção de G , cada vértice v_m é adjacente aos vértices $v_{(m\pm 1) \bmod n}, \dots, v_{(m\pm k) \bmod n}$. Assim, como v_i, v_j e v_l são independentes, isto é, não são dois a dois adjacentes e $i \leq j \leq l$, temos que

$$\begin{aligned} j - i &\geq k + 1, \\ l - j &\geq k + 1, \\ (n - l) + i &\geq k + 1. \end{aligned}$$

Simplificando o sistema de inequações acima, concluímos que

$$k \leq \frac{n}{3} - 1.$$

□

Corolário 1. *Seja $G := C_n^k$, com n ímpar e $k < \lfloor n/2 \rfloor$. Se $k > n/3 - 1$, então G não é tipo 1.*

Demonstração. Suponha que G seja tipo 1. Pelo Lema 3.1, o grafo G é harmônico. Pelo Lema 3.3, $k \leq n/3 - 1$ contrariando a hipótese. □

Teorema 3.1. *O grafo C_7^2 é tipo 2.*

Demonstração. Pelo Corolário 1, quando $k = 2$, n ímpar e $5 < n < 9$, G não é tipo 1. Portanto, o C_7^2 não é tipo 1. Para completar a demonstração, a Figura 5 exibe uma $(\Delta + 2)$ -coloração total para o C_7^2 . □

Abstract. The total chromatic number is the least number of colours needed to colour the edges and vertices of a graph so that no adjacent or incident elements of G receive the same colour. In this article we show that the chromatic number of C_n^2 , $n \geq 6$, is $\Delta + 1$ if $n \neq 7$ and $\Delta + 2$ if $n = 7$.

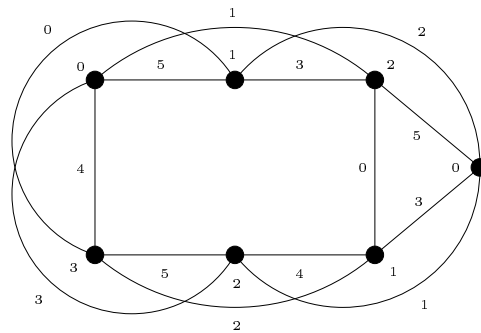


Figura 5: Coloração total do grafo C_7^2 .

Referências

- [1] S. Akbari, Two conjectures on uniquely totally colorable graphs, *Discrete Mathematics*, **266** (2003), 41-45.
- [2] M. Behzad, “Graphs and their chromatic numbers”, PhD thesis, Michigan State University, 1965.
- [3] M. Behzad, G. Chartrand, and J.K. Cooper Jr., The colour numbers of complete graphs, *J. London Math. Soc.*, **42** (1967), 226-228.
- [4] B.L. Chen, L. Dong, Q.Z. Liu, and K.C. Huang, Total colorings of equibipartite graphs, *Discrete Mathematics*, **194** (1999), 59-65.
- [5] A.G. Chetwynd and A.J.W. Hilton, Some refinements of the chromatic number conjecture, *Congressus Numerantium*, **66** (1988), 195-215.
- [6] K.H. Chew, Total chromatic number of graphs of odd order and high degree, *Discrete Mathematics*, **205** (1999), 39-46.
- [7] C.M.H. de Figueiredo, J. Meidanis and C.P. de Mello, Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs, *Information Processing Letters*, **70** (1999), 147-152.
- [8] A.J.W. Hilton and H.R. Hind, Non-conformable subgraphs of non-conformable graphs, *Discrete Mathematics*, **256** (2002), 203-224.
- [9] A.J.W. Hilton, F.C. Holroyd and C. Zhao, The overfull conjecture and the conformability conjecture, *Discrete Mathematics*, **241** (2001), 343-361.
- [10] S. Isobe, X. Zhou and T. Nishizeki, A polynomial-time algorithm for finding total colorings of partial k -trees, *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, **10** (1999), 171-194.

- [11] S. Isobe, X. Zhou and T. Nishizeki, Total colorings of degenerated graphs, in *Lecture Notes in Computer Science*, volume 2076, pp. 506-517, 2001.
- [12] A.V. Kostochka, The total coloring of a multigraph with maximal degree 4, *Discrete Mathematics*, **17** (1977), 161-163.
- [13] C.J.H. McDiarmid and A. Sánchez-Arroyo, Total colouring regular bipartite graphs is NP-hard, *Discrete Mathematics*, **124** (1994), 155-162.
- [14] A. Sánchez-Arroyo, Determining the total colouring number is NP-hard, *Discrete Mathematics*, **78** (1989), 315-319.
- [15] V.G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p -graph, *Metody Diskret. Analiz.*, (in Russian), **3** (1964), 25-30.
- [16] V.G. Vizing, The chromatic class of a multigraph, *Kibernetika (Kiev)*, (in Russian), **3** (1965), 29-39. English version in *Cybernetics*, **1**, 32-41.
- [17] W.F. Wang, Equitable total coloring of graphs with maximum degree, *Graphs and Combinatorics*, **18**, No. 3 (2002), 677-685.
- [18] H.P. Yap, Total colourings of graphs, in *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1623, Springer, Berlin, 1996.
- [19] Z. Zhang, L. Liu, J. Wang and H. Li, A note on the total chromatic number of Halin graphs with maximum degree 4, *Applied Mathematics Letters*, **11**, No. 5 (1998), 23-27.