

Respostas Dinâmicas em Sistemas Discretos Matriciais de Ordem Arbitrária

I. FERREIRA¹, Departamento de Matemática, CCNE, UFSM, 97105-900 Santa Maria, RS, Brasil.

J.R. CLAEYSSEN², Instituto de Matemática, UFRGS, 90001-000 Porto Alegre, RS, Brasil.

Resumo. Neste trabalho, a resposta impulso é utilizada como ferramenta básica no estudo direto de sistemas discretos LTI de ordem arbitrária. Esta abordagem leva ao desenvolvimento de uma conveniente plataforma para a obtenção de respostas dinâmicas discretas. Em particular, as respostas forçadas são decompostas na soma de uma resposta permanente e de uma resposta livre induzida pelos valores iniciais da resposta permanente. Nas simulações foram considerados vários esquemas de integração numérica, em particular, no modelo de suspensão de um carro, utilizou-se o esquema evolutivo de segunda ordem de Numerov.

1. Introdução

Foi realizado, neste trabalho, um estudo direto de sistemas discretos LTI de ordem arbitrária através do uso da resposta impulso a qual gera uma base dinâmica. A teoria descrita sob este enfoque é desenvolvida de maneira geral e direta para sistemas de n -ésima ordem, a partir da base dinâmica gerada pela resposta impulso na forma padrão e normalizada. A diferença do que é encontrado usualmente na literatura de análise numérica, controle, vibrações, sinais e sistemas é que não existe necessidade da utilização da formulação de estado, através da qual reduz-se um sistema de ordem superior a um sistema de primeira ordem. Embora esta redução não seja única ela permite, algumas vezes, contornar situações específicas, mas no entanto, algumas propriedades relativas aos sistemas originais como simetria, banda da matriz ou positividade, são normalmente perdidas. Nas simulações numéricas de equações evolutivas são usados esquemas em diferenças decorrentes de discretizações temporais de sistemas matriciais concentrados ou de sistemas com parâmetros distribuídos. Além disso, as respostas dinâmicas são calculadas através de um algoritmo de decomposição com respostas livres descritas com o uso da base dinâmica e das respostas particulares do tipo resposta em frequência.

¹ifmoraes@smail.ufsm.br

²julio@mat.ufrgs.br

2. Tratamento Direto de Sistemas de Equações em Diferenças Lineares de Ordem Superior

Considere-se sistemas discretos da forma

$$\sum_{j=0}^m A_j y_{k+j} = f_k, \quad (2.1)$$

onde os coeficientes A_j são matrizes escalares de ordem $n \times n$; com A_m não singular; $y_j = y(j)$ e $f_j = f(j)$ são vetores *saída* e *entrada* de ordem n , respectivamente. De acordo com resultados obtidos para ordem arbitrária de equações em diferenças lineares com coeficientes matriciais, conforme [2] e [5], entre outros; tem-se que o estudo do sistema (2.1) depende da solução h_k do problema de valor inicial

$$\begin{cases} A_m h_{k+m} + A_{m-1} h_{k+m-1} + \dots + A_1 h_{k+1} + A_0 h_k = 0 \\ h_0 = 0, h_1 = 0, \dots, h_{m-2} = 0, A_m h_{m-1} = I \end{cases}, \quad (2.2)$$

denominada solução fundamental ou dinâmica discreta. Aqui, I denota a matriz identidade de ordem n . Quando assumido que $h_k = 0$ para $k \leq 0$, a solução fundamental h_k é chamada resposta a um impulso discreto. Aplicando-se a transformada- \mathcal{Z} ou a técnica de séries de potências, decorre que a solução dinâmica também satisfaz

$$h_{k+m} A_m + h_{k+m-1} A_{m-1} + \dots + h_{k+1} A_1 + h_k A_0 = 0,$$

ou seja, h_k é uma solução à esquerda e à direita. Por unicidade, verifica-se que sendo os coeficientes A_k simétricos então a solução h_k também é uma matriz simétrica. A solução do problema inicial (2.1) com condições iniciais $y_j = y_j^0$ para $j = 0 : m - 1$ é dada por

$$y_k = \sum_{j=0}^{m-1} h_{k,j} y_j + \sum_{j=0}^{k-1} h_{k-1-j} f_j,$$

onde

$$(h_{k,0} \quad \dots \quad h_{k,m-1}) = (h_k \quad \dots \quad h_{k+m-1}) \begin{pmatrix} A_{m-1} & A_{m-2} & A_{m-3} & \cdot & A_0 \\ A_{m-2} & A_{m-3} & A_{m-4} & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ A_1 & A_0 & 0 & \cdot & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

A solução dinâmica h_k do problema de valor inicial (2.2) gera as bases $[h_{k,0}, h_{k,1}, \dots, h_{k,m-1}]$ e $[h_k, h_{k+1}, \dots, h_{k+m-1}]$, uma vez que o correspondente carorotiano (*wrosnskiano discreto*) é não singular. A solução de (2.1) com valores iniciais nulos, normalmente chamada resposta forçada do sistema, é determinada pela convolução discreta

$$y_k = \sum_{j=0}^{k-1} h_{k-1-j} f_j. \quad (2.4)$$

3. Técnicas Básicas de Resolução

A resposta dinâmica ou total de um sistema discreto LTI representado por (2.1) com condições iniciais y_0, y_1, \dots, y_{m-1} é usualmente calculada de maneira simbólica ou iterativa. No cálculo simbólico, a distinção fundamental entre uma ou outra técnica é o uso ou não de autovetores (modos). Essas técnicas podem ser agrupadas em dois grandes métodos:

- Espectral ou Modal
- Não-espectral ou Não-modal

Na literatura usa-se freqüentemente a formulação das variáveis de estado que transforma o sistema original em um sistema de primeira ordem no tempo. Após a sua resolução, retorna-se às variáveis iniciais do problema. Com a formulação direta, introduzida na seção 2, esta metodologia é desnecessária.

3.1. Método Espectral

O método espectral para resolução de sistemas discretos descritos pela equação (2.1) é aplicado quando o problema associado de autovalor, denotado por

$$\left(\sum_{j=0}^m A_j \lambda^j \right) v = 0, \quad \text{para } v \neq 0,$$

gera a partir de seus mn autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{mn})$ e dos autovetores correspondentes $(v_1, v_2, \dots, v_{mn})$ uma matriz V de ordem mn , dada por

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{mn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_{mn} v_{mn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} v_1 & \lambda_2^{m-1} v_2 & \cdots & \lambda_{mn}^{m-1} v_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_o \\ V_o D \\ \vdots \\ V_o D^{m-1} \end{bmatrix},$$

com colunas linearmente independentes. Nesta expressão D é uma matriz diagonal de ordem mn , denominada *matriz espectral*, cujos elementos da diagonal correspondem aos autovalores do problema e, V_o é a matriz cujas colunas são os autovetores associados. Isto é válido se o sistema possui todos os autovalores distintos.

A técnica de superposição linear é usualmente utilizada quando têm-se uma entrada simples do tipo exponencial, trigonométrica ou polinomial, entre outras. O cálculo da resposta do sistema (2.1), através do método de variação de parâmetros aplica-se para entradas quaisquer, sendo que este consiste em, dada a base espectral $\phi_{k,1} = \lambda_1^k v_1, \phi_{k,2} = \lambda_2^k v_2, \dots, \phi_{k,mn} = \lambda_{mn}^k v_{mn}$, procura-se

$$y_k = \sum_{j=0}^{mn} c_{j,k} \lambda_j^k v_j.$$

Os valores y_{k+p} para $p = 1 : m - 1$ são expressos por

$$y_{k+p} = \sum_{j=1}^{mn} (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+p} v_j + \sum_{j=0}^{mn} c_{j,k} \lambda_j^{k+p} v_j,$$

com condições de Lagrange da forma

$$\sum_{j=1}^{mn} (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+p} v_j = 0, \quad \text{para } p = 1 : m - 1. \quad (3.1)$$

Substituindo-se as expressões y_{k+p} para $p = 1 : m - 1$ no sistema (2.1), decorre que

$$A_m \left[\sum_{j=1}^{mn} (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+m} v_j \right] = f_k. \quad (3.2)$$

Deste modo, o sistema linear formado pelas m equações (3.1) e (3.2) pode ser escrito na forma matricial compacta

$$VD^{k+1} \Delta C_k = \mathcal{F}_k, \quad (3.3)$$

onde denotam-se

$$V = \begin{bmatrix} V_o \\ V_o D \\ \vdots \\ V_o D^{m-1} \end{bmatrix}, \quad D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{mn}^k \end{bmatrix}, \quad \Delta C_k = \begin{bmatrix} \Delta c_{1,k} \\ \Delta c_{2,k} \\ \vdots \\ \Delta c_{mn,k} \end{bmatrix},$$

$$\Delta c_{j,k} = c_{j,k+1} - c_{j,k} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_m^{-1} f_k \end{bmatrix}.$$

Escrevendo-se,

$$c_{k+1} = \begin{bmatrix} c_{1,k+1} \\ c_{2,k+1} \\ \vdots \\ c_{mn,k+1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c_k = \begin{bmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \\ \vdots \\ c_{mn,k} \end{bmatrix},$$

a expressão (3.3) equivale a equação em diferenças de primeira ordem

$$c_{k+1} = c_k + (VD^{k+1})^{-1} \mathcal{F}_k,$$

com solução da forma

$$c_k = c_0 + \sum_{j=1}^k (VD^j)^{-1} \mathcal{F}_j.$$

O vetor c_0 é obtido resolvendo o sistema inicial $Vc_0 = [y_0 \ y_1 \ \cdots \ y_{m-1}]^T$. Finalmente, a resposta total do sistema pode ser obtida a partir da expressão

$$y_k = V_o D^k c_0 + \sum_{j=1}^k V_o D^{k-1-j} V^{-1} \mathcal{F}_j, \quad k \geq 1.$$

Certamente, o método de variação de parâmetros pode ser implementado usando-se uma base qualquer. Para maiores detalhes e outras técnicas, veja-se [7].

3.2. Uma Fórmula Não-Espectral

A resposta impulso discreta que corresponde a solução do problema de valor inicial (2.2) pode ser calculada através da fórmula desenvolvida por Claeysen, veja-se em [2] e [3], sendo expressa por

$$h_k = \sum_{j=1}^{mn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d_{k+j-i-1} h_{mn-j}, \quad (3.4)$$

onde os parâmetros b_i são os coeficientes do polinômio característico associado ao sistema, sendo denotado por

$$P(z) = \det \left[\sum_{j=0}^m A_j z^j \right] = \sum_{k=0}^{mn} b_k z^k.$$

Em (3.4) a função discreta $d_k = d^{(k)}(0)$ corresponde a solução da equação em diferenças escalar

$$b_{mn} d_{k+mn} + b_{mn-1} d_{k+mn-1} + \cdots + b_1 d_{k+1} + b_0 d_0 = 0,$$

com valores iniciais $d_0 = 0$, $d_1 = 0, \dots$, $d_{mn-2} = 0$, $b_{mn} d_{mn-1} = 1$. Aplicando-se a transformada \mathcal{Z} em (3.4) obtém-se a matriz de transferência, cuja expressão é

$$H(z) = z \left(\sum_{j=0}^m A_j z^j \right)^{-1} = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad \text{onde} \quad Q(z) = \sum_{j=1}^{mn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i z^{j-i-1} h_{mn-j}.$$

4. Decomposição da Resposta Forçada para Sistemas Discretos

A *resposta forçada* de um sistema discreto corresponde a solução do sistema matricial dado por (2.1) com condições iniciais nulas denotadas por $y_0 = 0$, $y_1 = 0, \dots, y_{m-1} = 0$; sendo obtida através da *convolução discreta* expressa em (2.4). A resposta pode então ser decomposta na forma

$$y_k = y_{h,k} + y_{p,k}, \quad (4.5)$$

onde $y_{p,k}$ é a solução permanente e $y_{h,k}$ uma resposta livre. As respostas livres são introduzidas pelas respostas permanentes como uma retroalimentação no sistema. Elas podem ser caracterizadas com o uso da base dinâmica gerada pela resposta impulso discreta, h_k e de suas translações. De acordo com a teoria desenvolvida para sistemas concentrados, veja-se [8], a decomposição para a resposta forçada discreta é dada por

$$y_k = y_{p,k} - \sum_{j=0}^{m-1} h_{j,k} y_{p,k+j},$$

onde

$$h_{j,k} = \sum_{i=0}^{m-j-1} h_{k+i} A_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : m - 1,$$

sendo h_k a resposta impulso discreta. Esta decomposição torna-se prática quando a resposta permanente é facilmente obtida.

4.1. Modelos Discretos Associados à Esquemas de Integração Numérica

A integração numérica de sistemas de equações diferenciais é realizada através de esquemas em diferenças que correspondem a sistemas discretos, para maiores detalhes veja-se em [10] e [11], entre outros. Estes esquemas são sempre testados com sistemas lineares conhecidos. Com objetivo de ilustrar a decomposição para sistemas discretos serão feitas simulações numéricas para análise do comportamento dinâmico de um modelo da metade de um carro, ilustrado na Fig. 1, conforme Brogan [1].

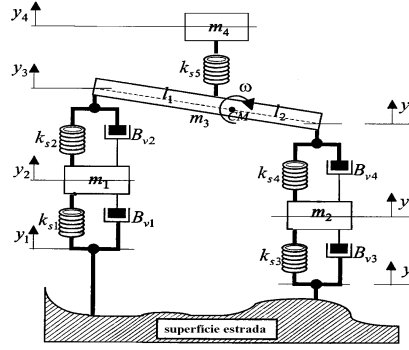


Figura 1: Modelo da suspensão da metade de um carro

O modelo é descrito pelo sistema de segunda ordem

$$A_2 \frac{d^2 y}{dt^2}(t) + A_0 y(t) = B_0 u(t),$$

onde

$$A_2 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} k_{s1} & 0 \\ 0 & k_{s3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{s2} & 0 & -k_{s2} & k_{s2}l_1 & 0 \\ 0 & k_{s3} + k_{s4} & -k_{s4} & -k_{s4}l_2 & 0 \\ -k_{s2} & -k_{s4} & k_{s2} + k_{s4} + k_{s5} & k_{s4}l_2 - k_{s2}l_1 + k_{s5}(\Delta l) & -k_{s5} \\ k_{s2}l_1 & -k_{s4}l_2 & k_{s4}l_2 - k_{s2}l_1 + k_{s5}(\Delta l) & k_{s2}l_1^2 + k_{s4}l_2^2 - k_{s5}(\Delta l)^2 & -k_{s5}(\Delta l) \\ 0 & 0 & -k_{s5} & -k_{s5}(\Delta l) & k_{s5} \end{bmatrix},$$

onde $\Delta l = l_2 - l_1$. Os valores dos parâmetros utilizados nas simulações são apresentados na Tab. 1. Supondo-se que a entrada no sistema se dá apenas na posição dos pneus de acordo com as irregularidades da estrada, considere-se para efeitos de ilustração ³, entradas do tipo oscilatórias nas duas rodas, dadas por

$$u_1 = u_5 = \begin{cases} 0, & 0 < t < 0.25 \\ 0.075 - 0.075 \cos(8\pi t), & 0.25 < t < 0.5 \\ 0, & t > 0.5 \end{cases}$$

e com amplitude máxima de 15cm e condições iniciais nulas. Como a componente de amortecimento para os parâmetros utilizados não tem efeito significativo a mesma foi desprezada. O esquema utilizado para integração numérica nas simulações foi o de Numerov [11] para sistemas lineares não-dissipativos de segunda ordem do tipo $\ddot{y}(t) = f(t, y)$, denotado por

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = \frac{(\Delta t)^2}{12} (f(t_{k+2}, y_{k+2}) + 10f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)).$$

A entrada no sistema é ilustrada na Tab. 2, a resposta forçada do sistema utilizando-se o esquema de integração numérica encontra-se na Tab. 3 e os resultados das simulações numéricas da decomposição discreta para o modelo estão na Tab. 4.

m_1	m_2	m_3	m_4
$85Kg$	$153Kg$	$1876Kg$	$240Kg$
k_{s1}	k_{s2}	k_{s3}	k_{s4}
$240000 N/m$	$15730 N/m$	$240000 N/m$	$12480 N/m$
J	K_{s5}	l_1	l_2
$2337Kg\text{m}^2$	$15N/m$	$1.718 m$	$0.945 m$

Tabela 1: Valores dos parâmetros usados para o modelo da metade do veículo

5. Conclusões

Foi utilizada uma abordagem direta para sistemas discretos de ordem superior através do uso da resposta discreta a impulso. Não foi necessário o uso da formulação de espaço de estado para sistemas desse tipo, comumente usada na literatura. Desenvolveu-se a decomposição de respostas forçadas de sistemas discretos com o uso da base dinâmica. Foram realizadas várias simulações numéricas com diferentes esquemas de integração numérica. O modelo aqui apresentado foi o da suspensão de veículos, neste caso, o uso do esquema de Numerov produziu resultados satisfatórios. Devido ao acoplamento, tem-se respostas não nulas para entradas nulas em algumas componentes do sistema.

³Na realidade, as irregularidades das estradas correspondem à entradas aleatórias no sistema, isto é, não determinísticas.

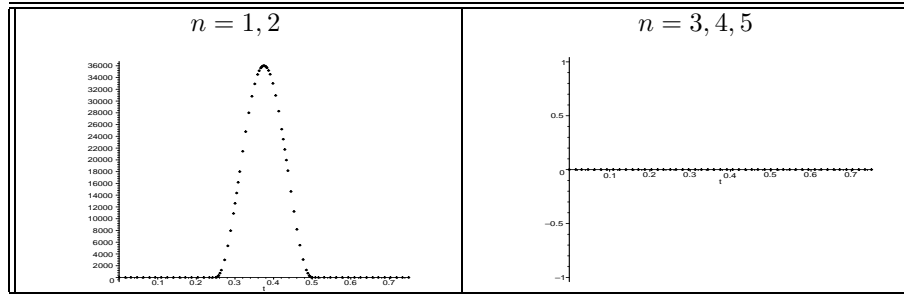


Tabela 2: Entrada no sistema por componentes

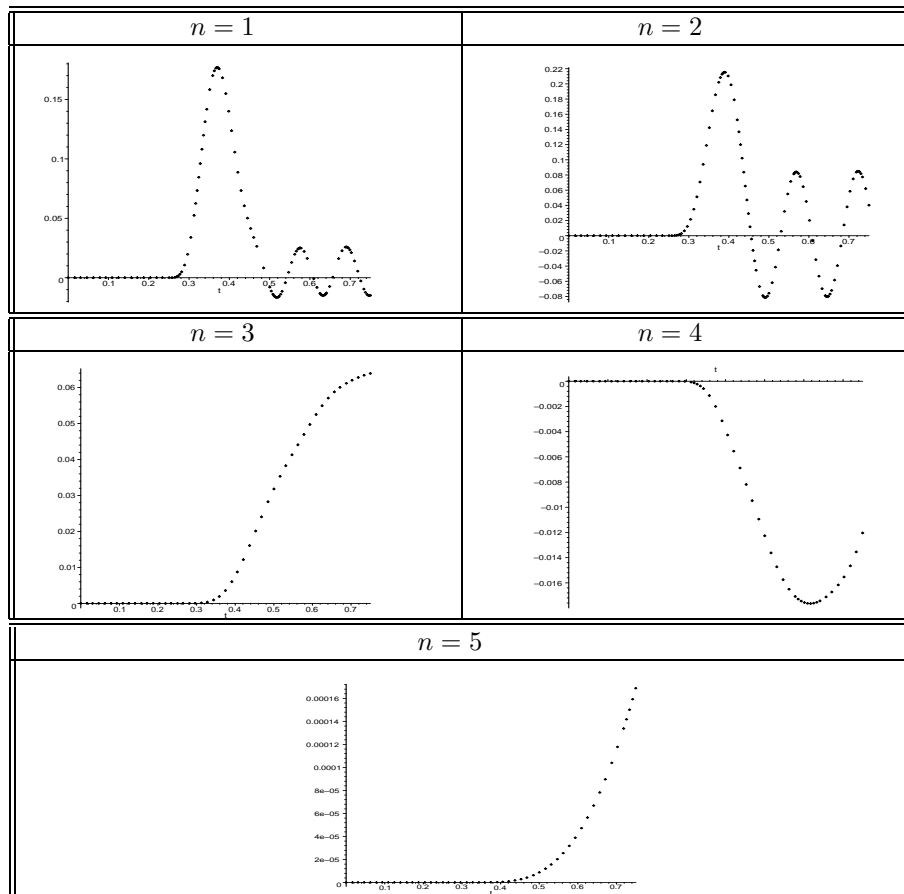


Tabela 3: Resposta forçada por componentes

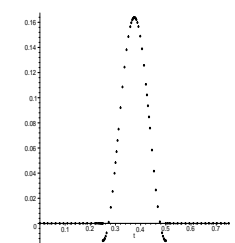
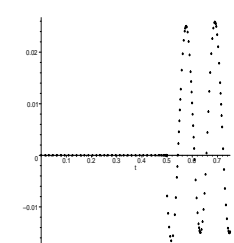
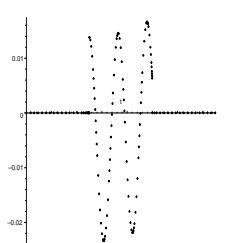
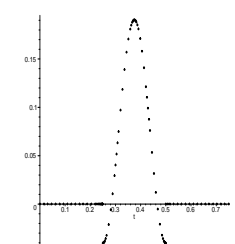
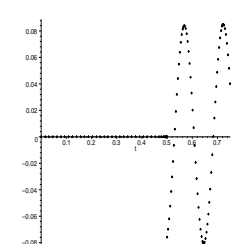
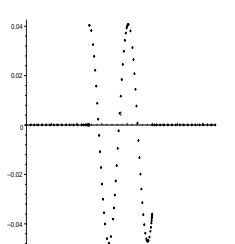
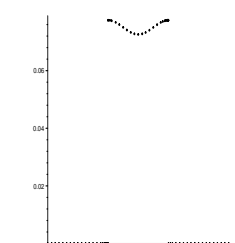
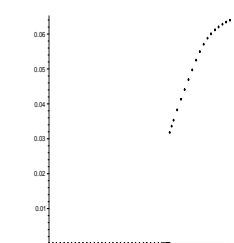
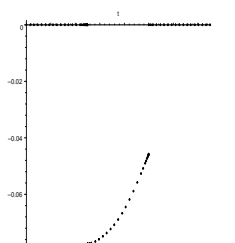
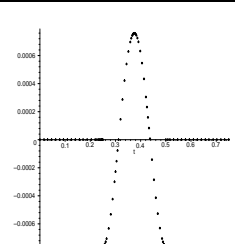
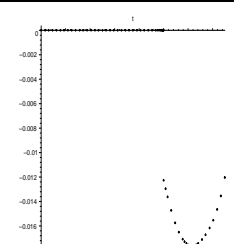
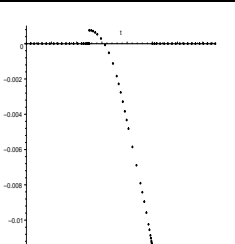
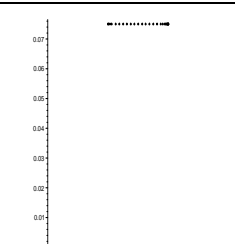
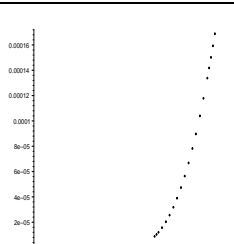
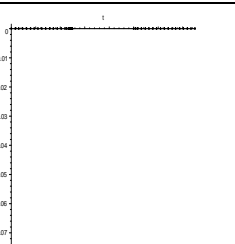
n	Resp. Permanente	Resp. Homogênea Induzida CIs.	Resp. Homogênea Induzida Perm.
1			
2			
3			
4			
5			

Tabela 4: Resposta permanente, respostas homogêneas induzidas pelo sistema e pela permanente por componentes

Abstract. In this work the impulse response is used as a basic tool for a direct study of discrete systems LTI of arbitrary order. This approach leads to the development of a convenient platform for obtaining discrete dynamical responses. In particular, forced responses are decomposed in the sum of a permanent response and a free response induced by the initial values of the permanent solution. Numerical simulations were performed with several numerical integration schemes, in particular, with a suspension car model through the second order evolution scheme of Numerov.

Referências

- [1] L. Brogan, "Modern Control Theory", Prentice Hall, New Jersey, 1992.
- [2] J.R. Claeysen e T. Tsukazan, Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations, *Quarterly of Applied Mathematics*, **48**, No. 1 (1990).
- [3] J.R. Claeysen, G.C. Suazo e C.R. Jung, A Direct Approach to Second-order Matrix Non-classical Vibrating Equations, *Applied Numerical Mathematics*, **30** (1999), 65-78.
- [4] J.R. Claeysen e R.A. Soder, A Dynamical Basis for Computing the Modes of Euler-Bernoulli Beams, *Journal of Sound and Vibration*, **259**, No. 4 (2003), 986-900.
- [5] J.R. Claeysen, I. Ferreira e R.D. Copetti, Decomposition of Forced Responses in Vibrating Systems, *Applied Numerical Mathematics*, **47** (2003), 391-405.
- [6] I. Ferreira, J. R. Claeysen e G. Canahualpa, Convolution with Weighting, Impulse, Transient and Permanent Responses, em "SIAM Meeting in Control, Signals and Linear Algebra", Boston, 2001.
- [7] I. Ferreira, "Uma Metodologia Unificada no Domínio Tempo para Sistemas Concentrados, Discretos e Distribuídos", Tese de Doutorado, PROMEC, UFRGS, Porto Alegre, RS, 2002.
- [8] I. Ferreira e J.R. Claeysen, Forced Responses in Continuous and Discrete Systems, em "Anais do 1o. Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações", São José do Rio Preto, pp. 931-936, SBMAC, 2002.
- [9] J.H.Ginsberg, "Mechanical and Structural Vibrations:Theory and Applications", John Wiley, New York, 2002.
- [10] S.K. Godunov e V.S. Ryabenkii, Difference Schemes - An Introduction to the Underlying Theory, *Studies in Mathematics and its Applications*, Elsevier, **19** (1987).
- [11] E. Hairer, S.P. Norsett e G. Wanner, "Solving Ordinary Differential Equations I", Springer Series in Computational Mathematics, New York, 1987.