TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **6**, No. 1 (2005), 91-99.

Um Algoritmo Dual Viável para Programação Linear[1]

M.A.F. MENEZES[2], Departamento de Computação, Universidade Católica de Goiás (UCG), Cx.P. 86, 74605-010 Goiânia, GO, Brasil.

Resumo Neste trabalho estudamos um algoritmo de ponto-interior-inviável dual viável para programação linear devido a Menezes e Gonzaga [3], desenvolvendo uma estratégia preditora-corretora sob uma certa condição associada à viabilidade primal, com o objetivo de melhorar a eficiência do algoritmo mantendo a sua complexidade em iterações.

1. Introdução

Existe um problema em aberto em Programação Linear (PL) que consiste na obtenção de um algoritmo de ponto-interior-inviável com complexidade polinomial em $O(\sqrt{n}L)$ iterações para a formulação não artificial do problema de PL, onde n é o número de variáveis do problema e L é o tamanho do problema para dados inteiros. Com a exceção do método homogêneo e auto-dual para PL (Ye, Todd e Mizuno [8]) que possui $O(\sqrt{n}L)$ iterações para uma formulação artificial do problema de PL (e para problemas de Complementaridade Linear com a hipótese de monotonicidade, LCP, Ye [7]), a menor complexidade em iterações para a formulação não artificial é $O(nL)$ (por exemplo, veja Sheng e Potra [5]).

Em [6] e em [3] estudou-se este problema com a hipótese de viabilidade dual, obtendo-se, em ambos, algoritmos com $O(\sqrt{n}L)$ iterações. Em [1] estudou-se métodos primais-duais com inviabilidade primal e viabilidade dual, mas não se tratou sobre complexidade.

Neste trabalho estudamos e melhoramos o algoritmo em [3] através de um algoritmo que permite passos preditor-corretor sob 'certa condição'. Na inicialização do nosso algoritmo é necessário um procedimento de centralização, que é feito em geral nos algoritmos de pontos interiores (viáveis). Este procedimento de centralização tem complexidade $O(\sqrt{n}L)$ iterações (veja Gonzaga [2]).

Definiremos o problema na próxima seção. Na seção 3, definiremos as medidas de proximidade e o passo de Newton e estabeleceremos uma ponte entre os problemas de viabilidade e otimalidade. O algoritmo, sua convergência e sua complexidade em iterações serão formalizados na última seção.

[1]Este trabalho teve o apoio da Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da Universidade Católica de Goiás (PROPE/UCG).

[2]marco@ucg.br

O vetor e denota o vetor de uns e 0 denota o vetor nulo, ambos, com dimensões apropriadas no contexto. Denotamos operações componente por componente pela notação usual de números reais. Assim, dados vetores u, v com a mesma dimensão, uv, $u/v = uv^{-1}$, etc. denotam os vetores com componentes $u_j v_j$, u_j/v_j, etc.. Finalmente, os sub-índices '1' e '2' referem-se à viabilidade e à otimalidade, respectivamente.

2. O Problema

Consideremos os números inteiros m e n tais que $n > m > 0$. Dados uma matriz $\tilde{A} \in R^{m\times(n-1)}$ e vetores $b \in R^m$ e $\tilde{c} \in R^{n-1}$, denominamos de problema original o seguinte problema de programação linear primal:

$$(\tilde{P}) \quad \begin{array}{ll} \textit{minimizar} & \tilde{c}^T\tilde{x} \\ \textit{sujeito a:} & \tilde{A}\tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \geq 0. \end{array}$$

Sem perda de generalidade supomos que $\tilde{A}$ tem posto igual a m.

As hipóteses para este trabalho são:

(H1) O conjunto de soluções ótimas de $(\tilde{P})$ é não vazio e limitado.

(H2) Viabilidade dual.

Dado $\tilde{x}^0 \geq 0$ definimos

$$A = [\tilde{A} \ \ b - \tilde{A}\tilde{x}^0], \qquad c^T = [\tilde{c}^T, 0] \ \text{ e } \ \xi^T = [0^T, 1].$$

Observamos que o ponto $x^T = [(\tilde{x}^0)^T, 1]$ satisfaz $Ax = b$ e $x \geq 0$. Além disso, a matriz A preserva o mesmo posto de $\tilde{A}$, $\xi^T x = x_n$ e $c^T x = \tilde{c}^T\tilde{x}$.

Por construção, um problema equivalente ao problema $(\tilde{P})$, a menos de uma dimensão, é o seguinte:

$$(P_0) \quad \begin{array}{ll} \textit{minimizar} & c^T x \\ \textit{sujeito a:} & Ax = b \\ & \xi^T x = 0 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

O seu dual é

$$(D_0) \quad \begin{array}{ll} \textit{maximizar} & b^T y \\ \textit{sujeito a:} & A^T y - \xi t + s = c \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Através da hipótese $(H1)$ vamos introduzir um limitante inferior para o parâmetro θ_c, a saber: dado $\theta_0 \geq 1$,

$$v(P_2)_{\theta_0} = min\{c^T x; Ax = b, \xi^T x \leq \theta_0, x \geq 0\}.$$

Vamos resolver o par de problemas (P_0) e (D_0) considerando dois outros problemas (subproblemas): dados $\theta_c > v(P_2)_{\theta_0}$ e $\theta > 0$, definimos

$$\begin{array}{lll} (P_1) & \textit{minimizar} & \xi^T \breve{x} \\ & \textit{sujeito a:} & A\breve{x} = b \\ & & c^T\breve{x} + \breve{x}_{n+1} = \theta_c \\ & & \breve{x} \geq 0, \breve{x}_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{lll} (P_2) & \textit{minimizar} & c^T x \\ & \textit{sujeito a:} & Ax = b \\ & & \xi^T x + x_{n+1} = \theta \\ & & x \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \end{array}$$

e os seus respectivos problemas duais

$$\begin{array}{lll} (D_1) & \textit{maximizar} & b^T y - \theta_c t \\ & \textit{sujeito a:} & A^T y - ct + s = \xi \\ & & t \geq 0, s \geq 0, \end{array}$$

e

$$\begin{array}{lll} (D_2) & \textit{maximizar} & b^T \omega - \theta l \\ & \textit{sujeito a:} & A^T \omega - \xi l + r = c \\ & & l \geq 0, r \geq 0. \end{array}$$

Para $\theta_c > v(P_2)_{\theta_0}$, denotamos

$$\mathcal{X}^0_{\theta_c} = \{(\breve{x}, \breve{x}_{n+1}) \in R^n_{++} \times R_{++}; A\breve{x} = b, c^T\breve{x} + \breve{x}_{n+1} = \theta_c\},$$

$$\hat{\mathcal{S}}^0_{\theta_c} = \{(\breve{s}, \breve{s}_{n+1}) \in R^n_{++} \times R_{++}; A^T\breve{y} - c\breve{t} + \breve{s} = \xi, \breve{t} = \breve{s}_{n+1}, \text{ para algum } \breve{y} \in R^m\},$$

$$\hat{\mathcal{F}}^0_{\theta_c} = \{(\breve{x}, \breve{x}_{n+1}, \breve{s}, \breve{s}_{n+1}) \in \mathcal{X}^0_{\theta_c} \times \hat{\mathcal{S}}^0_{\theta_c}\}$$

e, para $\theta > 0$, denotamos

$$\mathcal{X}^0_{\theta} = \{(x, x_{n+1}) \in R^n_{++} \times R_{++}; Ax = b, \xi^T x + x_{n+1} = \theta\},$$

$$\hat{\mathcal{S}}^0_{\theta} = \{(s, s_{n+1}) \in R^n_{++} \times R_{++}; A^T y - \xi t + s = c, t = s_{n+1}, \text{ para algum } y \in R^m\},$$

$$\hat{\mathcal{F}}^0_{\theta} = \{(x, x_{n+1}, s, s_{n+1}) \in \mathcal{X}^0_{\theta} \times \hat{\mathcal{S}}^0_{\theta}\}.$$

O par de problemas (P_1) e (D_1) é o problema primal-dual associado ao problema de viabilidade primal-dual, enquanto o par de problemas (P_2) e (D_2) é o problema primal-dual associado ao problema de otimalidade primal-dual. A seguir vamos buscar uma formulação que envolve a resolução de sistemas de igualdades e desigualdades para estes pares de problemas.

Considere $\theta_c > v(P_2)_{\theta_0}$ e $\mu_\xi > 0$. As condições de otimalidade para o problema que define o ponto central $(\breve{x}, \breve{x}_{n+1}) \in \mathcal{X}^0_{\theta_c}$ são as seguintes: existem $\bar{y} \in R^m$ e $\bar{t} \in R$ tais que definindo

$$\breve{s} = \mu_\xi \breve{x}^{-1} > 0 \text{ e } \breve{s}_{n+1} = \frac{n\mu_\xi}{\breve{x}_{n+1}} > 0,$$

$\breve{y} = \mu_\xi \bar{y}$ e $\breve{t} = -\mu_\xi \bar{t}$, obtemos o sistema primal-dual perturbado

$$(PD)_1 \quad \begin{array}{lcl} A\breve{x} & = & b \\ c^T\breve{x} + \breve{x}_{n+1} & = & \theta_c \\ A^T\breve{y} - c\breve{t} + \breve{s} & = & \xi \\ -\breve{t} + \breve{s}_{n+1} & = & 0 \\ \breve{x}\breve{s} & = & \mu_\xi e \\ \breve{x}_{n+1}\breve{s}_{n+1} & = & n\mu_\xi \\ \breve{x}, \breve{s} \geq 0, \breve{x}_{n+1}, \breve{s}_{n+1} \geq 0. & & \end{array}$$

Observamos que o *gap* de dualidade associado a $(\breve{x}, \breve{x}_{n+1})$ e $(\breve{y}, \breve{t}, \breve{s}, \breve{s}_{n+1})$, satisfazendo o sistema primal-dual perturbado $(PD)_1$, é definido por

$$\Delta_1 = \xi^T\breve{x} - (b^T\breve{y} - \theta_c\breve{t}) = \breve{x}^T\breve{s} + \breve{x}_{n+1}\breve{s}_{n+1} = 2n\mu_\xi.$$

Considere $\theta > 0$ e $\mu > 0$. As condições de otimalidade para o problema que define o ponto central $(x, x_{n+1}) \in \mathcal{X}^0_\theta$ são as seguintes: existem $\tilde{y} \in R^m$ e $\tilde{t} \in R$ tais que definindo

$$s = \mu x^{-1} > 0 \text{ e } s_{n+1} = \frac{n\mu}{x_{n+1}} > 0,$$

$y = \mu\tilde{y}$ e $t = -\mu\tilde{t}$, obtemos o sistema primal-dual perturbado

$$(PD)_2 \quad \begin{array}{lcl} Ax & = & b \\ \xi^T x + x_{n+1} & = & \theta \\ A^T y - \xi t + s & = & c \\ -t + s_{n+1} & = & 0 \\ xs & = & \mu e \\ x_{n+1}s_{n+1} & = & n\mu \\ x, s \geq 0, x_{n+1}, s_{n+1} \geq 0. & & \end{array}$$

Observamos que o *gap* de dualidade associado a (x, x_{n+1}) e (y, t, s, s_{n+1}), satisfazendo o sistema primal-dual perturbado $(PD)_2$, é definido por

$$\Delta_2 = c^T x - (b^T y - \theta t) = x^T s + x_{n+1}s_{n+1} = 2n\mu.$$

3. As Medidas de Proximidade e o Passo de Newton

Dados $\theta_c > v(P_2)_{\theta_0}$ e $\mu_\xi > 0$ e considerando o sistema $(PD)_1$, gostaríamos de encontrar $(\breve{x}, \breve{x}_{n+1}, \breve{s}, \breve{s}_{n+1})$ tal que $\breve{x}\breve{s}/\mu_\xi = e$ e $\breve{x}_{n+1}\breve{s}_{n+1}/\mu_\xi = n$. Assim, definimos a medida de proximidade,

$$(\breve{x}, \breve{x}_{n+1}, \breve{s}, \breve{s}_{n+1}, \mu_\xi) \in \hat{\mathcal{F}}^0_{\theta_c} \times R_{++} \mapsto \delta_{\theta_c}(\breve{x}, \breve{x}_{n+1}, \breve{s}, \breve{s}_{n+1}, \mu_\xi) = \delta_{\theta_c},$$

onde

$$\delta_{\theta_c} = \| \frac{1}{\mu_\xi} \begin{pmatrix} \breve{x}\breve{s} \\ \frac{\breve{x}_{n+1}\breve{s}_{n+1}}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} \|.$$

Da mesma forma, dados $\theta > 0$ e $\mu > 0$ e considerando o sistema $(PD)_2$, gostaríamos de encontrar (x, x_{n+1}, s, s_{n+1}) tal que $xs/\mu = e$ e $x_{n+1}s_{n+1}/\mu = n$. Assim, definimos a medida de proximidade,

$$(x, x_{n+1}, s, s_{n+1}, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}^0_{\theta} \times R_{++} \mapsto \delta_{\theta}(x, x_{n+1}, s, s_{n+1}, \mu) = \delta_{\theta},$$

onde

$$\delta_{\theta} = \| \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} xs \\ \frac{x_{n+1}s_{n+1}}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} \|.$$

Consideremos $\alpha \in (0, 1)$. Dados $\theta_c > v(P_2)_{\theta_0}$ e $\mu_\xi > 0$, dizemos que o ponto $(\breve{x}, \breve{x}_{n+1}, \breve{s}, \breve{s}_{n+1}) \in \hat{\mathcal{F}}^0_{\theta_c}$ é aproximadamente central ou α-central se, e somente se, $\delta_{\theta_c} \leq \alpha$. Por outro lado, dados $\theta > 0$ e $\mu > 0$, o ponto $(x, x_{n+1}, s, s_{n+1}) \in \hat{\mathcal{F}}^0_{\theta}$ é aproximadamente central ou α-central se, e somente se, $\delta_\theta \leq \alpha$.

Agora vamos estabelecer a ponte entre os pares de problemas (P_1), (D_1) e (P_2), (D_2) para pontos aproximadamente centrais.

Lema 3.1. *Considere $\alpha = 0,25$. Seja $(x, x_{n+1}, s, s_{n+1}) \in \hat{\mathcal{F}}^0_{\theta}$ um ponto aproximadamente central e sejam dados $\theta > 0$ e $\mu > 0$. Então, o ponto $(\breve{x}, \breve{x}_{n+1}, \breve{s}, \breve{s}_{n+1})$ em $\hat{\mathcal{F}}^0_{\theta_c}$ é aproximadamente central para*

$$\theta_c = c^T x + n\mu, \ \mu_\xi = \frac{x_{n+1}}{n},$$

$$\breve{x} = x, \ \breve{x}_{n+1} = n\mu,$$

$$\breve{s} = \frac{s}{s_{n+1}} \ \text{e} \ \breve{s}_{n+1} = \frac{1}{s_{n+1}}.$$

Demonstração. Lema 5.3.2 em [3]. □

Métodos de ponto-interior-inviável trabalham com pontos próximos da superfície de centros, conforme Mizuno, Todd e Ye [4]. Consideremos o problema $(PD)_2$. Dados os parâmetros $\alpha \in (0,1)$ (usualmente $\alpha = 0,25$) e $\theta > 0$, a vizinhança da superfície de centros é definida por

$$\mathcal{V}(\alpha,\theta) = \{(x, x_{n+1}, s, s_{n+1}, \mu) \in \hat{\mathcal{F}_\theta}^0 \times R_{++}; \delta_\theta(x, x_{n+1}, s, s_{n+1}, \mu) \leq \alpha\}.$$

Consideremos o problema $(PD)_2$. Dados $\theta > 0$, $(x, x_{n+1}, s, s_{n+1}) \in \hat{\mathcal{F}}_\theta^0$ e $\mu > 0$, consideremos os parâmetros $\nu \in R$ e $\gamma \geq 0$ associados aos parâmetros θ e μ, respectivamente. Idealmente, gostaríamos de encontrar

$$x^+ = x + u, \quad x_{n+1}^+ = x_{n+1} + u_{n+1},$$

$$y^+ = y + w, \quad t^+ = t + \Delta t, \quad s^+ = s + v \text{ e } s_{n+1}^+ = s_{n+1} + v_{n+1},$$

tais que $(x^+, x_{n+1}^+, s^+, s_{n+1}^+) \in \hat{\mathcal{F}}_{\nu\theta}^0$, $x^+s^+ = \gamma\mu e$ e $x_{n+1}^+ s_{n+1}^+ = n\gamma\mu$.

O passo de Newton resolve isto aproximadamente linearizando o sistema primal-dual perturbado $(PD)_2$, da seguinte maneira:

$$(N_2) \quad \begin{array}{ccccccccc} Au & & & & & & & = & 0 \\ \xi^T u & + & u_{n+1} & & & & & = & -(1-\nu)\theta \\ & & & A^T w & + \; v & - & \xi v_{n+1} & = & 0 \\ su & & & & +xv & & & = & -xs + \gamma\mu e \\ & & s_{n+1}u_{n+1} & & & & +x_{n+1}v_{n+1} & = & -x_{n+1}s_{n+1} + n\gamma\mu, \end{array}$$

onde $\Delta t = v_{n+1}$.

Essencialmente, dizemos que a importância da disciplina pontos interiores é a garantia de eficiência do passo de Newton para alguma medida de proximidade. Neste sentido, segue-se o próximo resultado.

Lema 3.2. *Considere $\sigma = 0,1/\sqrt{n}$. Dados o ponto $(x, x_{n+1}, s, s_{n+1}) \in \hat{\mathcal{F}}_\theta^0$, $\theta > 0$ e $\mu > 0$ tais que $\delta_\theta(x, x_{n+1}, s, s_{n+1}, \mu) = \delta_\theta < 1$ e seja o resultado do passo de Newton dado por $(x^+, x_{n+1}^+, s^+, s_{n+1}^+)$ a partir do ponto (x, x_{n+1}, s, s_{n+1}). Então,*

$$\delta_\theta(x^+, x_{n+1}^+, s^+, s_{n+1}^+, \mu) \leq \frac{\delta_\theta^2}{\sqrt{8}(1-\delta_\theta)}$$

e $(x^+, x_{n+1}^+, s^+, s_{n+1}^+) \in \hat{\mathcal{F}}_\theta^0$ para $\delta_\theta \leq 0,7$.

Demonstração. Para $\nu = 1$, este é o caso do Teorema 5.4.1 em [3]. Caso contrário, este é o Teorema 2.4 em Sheng e Potra [5]. □

Agora vamos verificar o teste que é crucial para os dois algoritmos que apresentaremos na próxima seção, isto é, 'se'

$$\breve{x}_n - \Delta_1 = b^T \breve{y} - \theta_c \breve{t} \leq 0.$$

Usando o lema anterior, para pontos aproximadamente centrais, $\breve{y} = \frac{y}{s_{n+1}}$ e, também, $\breve{t} = \frac{1}{s_{n+1}}$. Daí,

$$b^T y \leq \theta_c$$

é o nosso teste considerando pontos aproximadamente centrais.

4. O Algoritmo

Inicialmente, vamos enunciar um algoritmo de ponto-interior-inviável dual viável de passos curtos, com $O(\sqrt{n}L)$ iterações e que necessita de um procedimento de centralização na sua inicialização, conforme [3].

Algoritmo 4.1. *Dual viável passos curtos.*

Dados: $\alpha = 0,25$, $\theta^0 > 0$, $\mu^0 > 0$ *e* $(x^0, x^0_{n+1}, s^0, s^0_{n+1}) \in \hat{\mathcal{F}}^0_{\theta^0}$ *tais que* $\delta_{\theta^0}(x^0, x^0_{n+1}, s^0, s^0_{n+1}, \mu^0) \leq \alpha$, $\sigma = \frac{0,1}{\sqrt{n}}$ *e* $L \in N$.
$k := 0$.
REPITA
  $(x, x_{n+1}, y, s, s_{n+1}) := (x^k, x^k_{n+1}, y^k, s^k, s^k_{n+1})$, $(\theta, \mu) := (\theta^k, \mu^k)$.
  $\theta_c := c^T x + n\mu$.
  Se $b^T y \leq \theta_c$
  Então
    $\theta^{k+1} := (1-\sigma)\theta + \sigma x_n$, $\mu^{k+1} := (1-\sigma)\mu$.
    $x_{n+1} := \theta^{k+1} - x_n$.
  Senão
    Se $x_n < 2^{-L}$, *então PARE.*
    $\theta^{k+1} := \theta$, $\mu^{k+1} := \frac{1}{1-\sigma}\mu$.
  Passo de Newton:
    Calcule $(u, u_{n+1}, w, v, v_{n+1})$ *por* (N_2) *com* $\mu = \mu^{k+1}$.
  $(x^{k+1}, x^{k+1}_{n+1}, y^{k+1}, s^{k+1}, s^{k+1}_{n+1}) := (x, x_{n+1}, y, s, s_{n+1}) + (u, u_{n+1}, w, v, v_{n+1})$.
  $k := k + 1$.
ATÉ QUE $(\theta^k < 2^{-L}$ *e* $\mu^k < 2^{-L})$ *ou* $\mu^k > 2^L$.

Finalizamos esta seção enunciando e demonstrando os resultados acerca do próximo algoritmo dual viável de passos não tão curtos, o qual mantém a mesma complexidade em iterações e que, também, necessita de um procedimento de centralização na sua inicialização.

Algoritmo 4.2. *Dual viável.*

Dados: $\alpha = 0,25$, $\theta^0 > 0$, $\mu^0 > 0$ *e* $(x^0, x^0_{n+1}, s^0, s^0_{n+1}) \in \hat{\mathcal{F}}^0_{\theta^0}$ *tais que* $\delta_{\theta^0}(x^0, x^0_{n+1}, s^0, s^0_{n+1}, \mu^0) \leq \alpha$, $\sigma = \frac{0,1}{\sqrt{n}}$ *e* $L \in N$.
$k := 0$.
REPITA
  $(x, x_{n+1}, y, s, s_{n+1}) := (x^k, x^k_{n+1}, y^k, s^k, s^k_{n+1})$, $(\theta, \mu) := (\theta^k, \mu^k)$.
  $\theta_c := c^T x + n\mu$.
  Se $b^T y \leq \theta_c$
  Então

Passo preditor:
Resolva (N_2) *com* $\nu = 0$ *e* $\gamma = 0$ *para* $h = (u, u_{n+1}, w, v, v_{n+1})$.
$\bar{\lambda} := max\{\lambda \in [0,1]; (x, x_{n+1}, y, s, s_{n+1}) + \lambda h \in \mathcal{V}(2\alpha, (1-\lambda)\theta)\}$.
$(x, x_{n+1}, y, s, s_{n+1}) := (x, x_{n+1}, y, s, s_{n+1}) + \bar{\lambda} h$.
$\theta^{k+1} := (1-\bar{\lambda})\theta + \bar{\lambda} x_n,\ \mu^{k+1} := (1-\bar{\lambda})\mu$.
$x_{n+1} := \theta^{k+1} - x_n$.
Senão
Se $x_n < 2^{-L}$, *então PARE.*
$\theta^{k+1} := \theta,\ \mu^{k+1} := \frac{1}{1-\sigma}\mu$.
Passo de Newton (corretor para o item então):
Resolva (N_2) *com* $\nu = 1$ *e* $\gamma = 1$ *para* $(u, u_{n+1}, w, v, v_{n+1})$.
$(x^{k+1}, x^{k+1}_{n+1}, y^{k+1}, s^{k+1}, s^{k+1}_{n+1}) := (x, x_{n+1}, y, s, s_{n+1}) + (u, u_{n+1}, w, v, v_{n+1})$.
$k := k + 1$.
ATÉ QUE $(\theta^k < 2^{-L}$ *e* $\mu^k < 2^{-L})$ *ou* $\mu^k > 2^L$.

Denotando $v(\tilde{P})$ o valor ótimo de $(\tilde{P})$, a interpretação para a primeira linha no item 'senão' dos Algoritmos 4.1 e 4.2 é a seguinte: resolver o problema (P_0), logo $(\tilde{P})$, significa encontrar x tal que $c^T x \leq v(\tilde{P}) + 2^{-L}$ e $\theta < 2^{-L}$ ou certificar que o problema original é inviável. Assim, se $\theta < 2^{-L}$ e estamos no item 'senão' do algoritmo, então o problema original (primal) está resolvido. Ainda, se $\mu > 2^L$, então o algoritmo certifica que o problema original $(\tilde{P})$ é inviável; apesar da hipótese $(H1)$.

O próximo resultado é fundamental para a convergência e para a complexidade em iterações do Algoritmo 4.2.

Teorema 4.3. *Para toda iteração* k, $k \geq 0$, *do Algoritmo* 4.2,

$$\delta_{\theta^k}(x^k, x^k_{n+1}, s^k, s^k_{n+1}, \mu^k) \leq \alpha \ e \ (x^k, x^k_{n+1}, s^k, s^k_{n+1}) \in \hat{\mathcal{F}}^0_{\theta^k}.$$

Demonstração. Esta demonstração é usual para métodos de pontos interiores (veja, por exemplo, [2]), uma vez que ainda podemos usar o Lema 3.2 de acordo com o passo corretor do item 'então' do algoritmo. □

A partir do Teorema 3.3, a convergência do Algoritmo 4.2 é garantida, porque usamos a mesma vizinhança do Algoritmo 4.1 que converge, conforme [3]. Finalmente, o próximo teorema mantém a complexidade em iterações do Algoritmo 4.1, porque a razão do decréscimo referente ao parâmetro θ, isto é, θ^{k+1}/θ^k, no item 'então' do Algoritmo 4.2 é ainda maior do que $(1 - \sigma/4)$. Observe que podemos tomar o máximo entre σ e $\bar{\lambda}$ em cada iteração do item 'então'.

Teorema 4.4. *O Algoritmo* 4.2 *pára em, no máximo,* $O(\sqrt{n}L)$ *iterações.*

Abstract In this work we study a dual feasible infeasible-interior-point algorithm for linear programming by Menezes and Gonzaga [3]. We develop a predictor-corrector strategy under certain condition associate to primal feasibility. Our objective is to improve the efficiency of the algorithm, while keeping its complexity in iterations.

Referências

[1] L.M.G. Drummond, "Classical and Generalized Central Paths with Algorithmic Applications in Linear Programming", Tese de Doutorado, IMPA/CNPq, 1997.

[2] C.C. Gonzaga, Path-following methods for linear programming, *SIAM Review*, **34**, No. 2 (1992), 167-224.

[3] M.A.F. Menezes, "Um Algoritmo de Ponto-Interior-Inviável com Complexidade $O(\sqrt{n}L)$ Iterações para Programação Linear", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1998.

[4] S. Mizuno, M.J. Todd e Y. Ye, A surface of analytic centers and primal-dual infeasible-interior-point algorithms for linear programming, *Mathematics of Operations Research*, **20**, No. 1 (1995), 135-162.

[5] R. Sheng e F.A. Potra, A quadratically convergent infeasible-interior-point algorithm for LCP with polynomial complexity, *SIAM Journal on Optimization*, **7**, No. 2 (1997), 304-317.

[6] Y. Ye, An $O(\sqrt{n}L)$-iteration combined phase I-phase II potential reduction algorithm for linear programming, Department of Management Sciences, The University of Iowa, Iowa City, Iowa 52242, 1992.

[7] Y. Ye, On homogeneous and self-dual algorithms for LCP, *Mathematical Programming* **76** (1997), 211-221.

[8] Y. Ye, M.J. Todd e S. Mizuno, An $O(\sqrt{n}L)$-iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithm, *Mathematics of Operations Research*, **19**, No. 1 (1994), 53-67.