

Termodinâmica Estendida de Fluidos Viscosos com Condução de Calor

A. VIGNATTI¹, Departamento de Matemática da UFES, 29060-900 Vitória, ES, Brasil.

I-SHIH LIU², Instituto de Matemática da UFRJ, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo. Termodinâmica estendida é uma teoria fenomenológica com o objetivo principal de determinar os campos de deformação, temperatura, tensão e fluxo de calor. As equações da termodinâmica estendida consistem das leis usuais de conservação de massa, momento e energia e um conjunto de equações de balanço adicionais, e tem sido aplicadas para a formulação de termodinâmica estendida de fluidos [1],[6] bem como sólidos viscoelásticos. Aqui será formulada uma teoria similar para fluido viscoso com condução de calor. Propagação de ondas em gases ideais tem sido analisada.

1. Introdução

A termodinâmica estendida para gases ideais monatômicos, como uma teoria de 13 momentos, i.e., densidade, velocidade, tensor tensão e fluxo de calor, foi primeiramente formulada por Liu e Müller [5]. A teoria proposta neste artigo trata também os fluidos viscosos. Porém, em vez de identificar a energia com o traço do momento de segunda ordem (tensor tensão), a energia é considerada como um campo independente. Assim, além de 13 equações de balanço usuais, é aumentada a equação da energia total, e conseqüentemente, a teoria consiste num sistema de 14 equações de balanço.

Não muito diferente da teoria proposta em [1], a análise do presente trabalho baseia-se no procedimento proposto em [3], o que facilita a exploração do princípio de entropia para deduzir as equações constitutivas.

Aqui é usada a notação usual da soma sobre índices repetidos. Parênteses indicam a simetriação $A_{\langle ij \rangle} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$ e o símbolo $\langle \rangle$ indica a simetriação sem traço $A_{\langle ij \rangle} = A_{(ij)} - \frac{1}{3}A_{ss}\delta_{ij}$.

¹aldo@cce.ufes.br

²liu@im.ufrj.br

2. Equações de Balanço

As leis de conservação de massa, momento linear e energia em um sistema de coordenadas espaciais (x_i, t) relativo a um referencial inercial e livres de suprimento externo, são escritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \varrho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho v_i v_k - T_{ik}) &= 0, \\ \frac{\partial \varrho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho e v_k - v_i T_{ik} + q_k) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $e = (v^2/2 + \varepsilon)$ é a energia total específica.

Nós consideramos um estado de um fluido viscoso condutor de calor caracterizado pelos 14 campos $(\varrho, v_i, \theta, T_{ij}, q_j)$, que representam a densidade de massa, a velocidade, a temperatura, o tensor tensão de Cauchy e o fluxo de calor, respectivamente. Estas equações estão baseadas nas leis de conservação (2.1) e nas equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{ij} v_k + G_{ijk}) &= P_{ij}, \\ \frac{\partial F_{iij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{iij} v_k + G_{iijk}) &= P_{iij}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

para os momentos F_{ij}, F_{iij} , seus fluxos G_{ijk}, G_{iijk} e produções P_{ij} e P_{iij} , que são acrescentadas para construirmos uma teoria estendida de 14 momentos para fluidos viscosos com condução de calor.

O requerimento da invariância Galileana do sistema de equações de balanço (2.1)-(2.2) implica a seguinte dependência explícita da velocidade v_i (ver [6]),

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \varrho v_i v_j + \varrho_{ij}, \\ G_{ijk} &= v_i p_{jk} + v_j p_{ik} + p_{ijk}, \\ P_{ij} &= \pi_{ij}, \\ F_{iij} &= \varrho v_i v_i v_j + 2\varrho_{ij} v_i + \varrho_{ii} v_j + \varrho_{iij}, \\ G_{iijk} &= v_i v_i p_{jk} + 2v_i v_j p_{ik} + 2v_i p_{ijk} + v_j p_{iik} + p_{iijk}, \\ P_{iij} &= \pi_{iij} + 3v_i \pi_{ij}, \end{aligned}$$

onde, respectivamente, $\varrho_{ij}, \varrho_{iij}, p_{ijk}, p_{iijk}, \pi_{ij}, \pi_{iij}$ são as partes internas dos momentos F_{ij} e F_{iij} , dos fluxos G_{ijk} e G_{iijk} e das produções P_{ij} e P_{iij} . Motivados pela teoria cinética de gases, admitiremos que $F_{ij}, G_{ijk}, P_{ij}, F_{iij}, G_{iijk}, P_{iij}$ são simétricos nos índices i, j . Admitiremos ainda que as quantidades $\varrho_{ij}, p_{ij} = -T_{ij}, p_{ijk}, \pi_{ij}, p_{iik}, p_{iijk}, \pi_{iij}$ assim como $\varrho, \varepsilon, T_{ik}, q_k$ são quantidades objetivas.

Em vez de considerar $(\varrho, v_i, \theta, T_{ij}, q_j)$ como as variáveis campos básicos do sistema (2.1)-(2.2), nós podemos escolher as variáveis $(\varrho, v_i, \theta, F_{ij}, F_{iij})$, por conveniência, assumindo uma certa invertibilidade usual das funções constitutivas. Portanto o sistema (2.1)-(2.2) será completado pelas relações constitutivas

$$\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}}(\varrho, v_i, \theta, F_{ij}, F_{iij}). \quad (2.3)$$

Aqui \mathcal{C} representa as quantidades constitutivas $\{\varrho_{ij}, q_k, T_{ij}, p_{ijk}, \pi_{ij}, G_{iijk}, \pi_{iij}\}$.

Todo campo $(\varrho, v_i, \theta, F_{ij}, F_{iij})$ que satisfaça o sistema (2.1)-(2.2) junto com as relações constitutivas (2.3), será chamado *processo termodinâmico*.

3. Princípio de Entropia

O princípio de entropia estabelece que para todo processo termodinâmico a inequação de entropia

$$\frac{\partial \varrho \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\varrho \eta v_k + \Phi_k) = \Sigma \geq 0$$

deve ser válida, onde o fluxo de entropia Φ_k , a produção de entropia Σ e a densidade de entropia específica η , são também dadas pelas relações constitutivas da forma (2.3). Além disso, a função $h = \varrho \eta$ é admitida ser côncava nas variáveis campos básicos e tanto h quanto $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ são admitidas ser objetivas.

As equações (2.1) e (2.2) podem ser escritas na forma compacta,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{u} v_k + \mathbf{G}_k) = \mathbf{P}, \quad (3.1)$$

com $\mathbf{u} = (\varrho, \varrho v_i, \varrho e, F_{ij}, F_{iij})$, $\mathbf{G}_k = (0, -T_{ik}, -v_i T_{ik} + q_k, G_{ijk}, G_{iijk})$, e $\mathbf{P} = (0, 0, 0, P_{ij}, P_{iij})$. O princípio de entropia implica na existência de um multiplicador de Lagrange [2],[3] \mathbf{A} tal que

$$dh = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{u}, \quad d\Pi_k = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{H}_k \quad \text{e} \quad \Sigma = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P},$$

onde, $\Pi_k = h v_k + \Phi_k$ e $\mathbf{H}_k = \mathbf{u} v_k + \mathbf{G}_k$.

Cada uma das quantidades $\varrho, \varepsilon, \varrho_{ij}, \varrho_{iij}, h$ e Φ_k é objetiva e em particular independente da velocidade, o que implica na existência de multiplicadores de Lagrange $\lambda_\varrho, \Lambda, \Lambda_{ij}, \lambda_j, \Lambda_i$ tais que

$$\begin{aligned} dh &= \lambda_\varrho d\varrho + \Lambda d(\varrho \varepsilon) + \Lambda_{ij} d\varrho_{ij} + \lambda_j d\varrho_{iij}, \\ 0 &= \varrho \Lambda_i + 3\lambda_{(i} \varrho_{jj)}, \\ d\Phi_k &= \Lambda dq_k + \Lambda_i dp_{ik} + \Lambda_{ij} dp_{ijk} + \lambda_j dp_{iijk}, \\ 0 &= (\lambda_\varrho \varrho + \Lambda \varrho \varepsilon + \Lambda_{sj} \varrho_{sj} + \lambda_j \varrho_{ssj} - h) \delta_{ik} \\ &\quad + \Lambda p_{ik} + 2\Lambda_{ij} p_{jk} + 2\lambda_j p_{ijk} + \lambda_i p_{jjk}, \\ \Sigma &= \Lambda_{ij} \pi_{ij} + \lambda_j \pi_{iij} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

O *equilíbrio* é definido como um processo termodinâmico sem produção de entropia. Da relação (3.2)₅, tem-se que a produção de entropia atinge seu valor mínimo no equilíbrio, isto é, quando $\pi_{ij} = 0$ e $\pi_{iij} = 0$ para todo $i, j = 1, 2, 3$.

Assim como Σ , as funções π_{ij}, π_{iij} , a priori, dependem das variáveis $\lambda_\varrho, \Lambda, \Lambda_{ij}, \lambda_j$ e Λ_i . Será assumido que π_{ij} é invertível na variável Λ_{ij} e que π_{iij} é invertível na variável λ_j para trocar Λ_{ij}, λ_j por π_{ij}, π_{iij} , respectivamente, como variáveis em Σ . Então a condição necessária para o mínimo da produção de entropia implica que

$$0 = \Lambda_{ij}|_E, \quad 0 = \lambda_j|_E \quad \text{e} \quad \Lambda_k|_E = 0. \quad (3.3)$$

As relações (3.2)_{1,4} avaliadas no equilíbrio reduzem-se para

$$dh|_E = \lambda_\varrho|_E d\varrho + \Lambda|_E d(\varrho\varepsilon) \quad \text{e} \quad p_{ik}|_E = p_0\delta_{ik}. \quad (3.4)$$

A relação de Gibbs

$$dh_0 = \frac{1}{\theta}(d(\varrho\varepsilon) - g d\varrho),$$

onde $h_0 = h|_E$, é decorrente da teoria ordinária [3], em que $g = \psi + \frac{p_0}{\varrho}$ é a entalpia livre, $\psi = \varepsilon - \theta\eta_0$ é a energia livre, $\eta_0 = \eta|_E$ é uma função dependente somente de ϱ e θ assim como h_0 , ε e p_0 . Comparamos (3.4)₁ com a relação de Gibbs e fizemos as identificações

$$\Lambda|_E = \frac{1}{\theta} \quad \text{e} \quad \lambda_\varrho|_E = -\frac{1}{\theta}g.$$

Será formulada aqui a teoria para processo termodinâmico “perto” do equilíbrio. Matematicamente, isto significa que as variáveis *não-equilíbrio*, ou seja, as variáveis que se anulam quando avaliadas no equilíbrio, serão consideradas como quantidades pequenas de primeira ordem e, funções constitutivas serão representadas em termos delas até certa ordem superior. Os multiplicadores de Lagrange (Λ_{ij} , λ_j , Λ_j) são quantidades não-equilíbrio.

São definidas as quantidades não-equilíbrio Λ_ε , Λ_ϱ , S_{ij} , ϱ_ε de modo que

$$\Lambda = \Lambda_\varepsilon + \frac{1}{\theta}, \quad \lambda_\varrho = \Lambda_\varrho - \frac{1}{\theta}g, \quad p_{ij} = p_0\delta_{ij} - S_{ij}, \quad \varrho_{ss} = \varrho_\varepsilon - \varrho_{ss}|_E. \quad (3.5)$$

A objetividade de ϱ_{ij} e ϱ_{ijj} implica que $\varrho_{\langle ij \rangle}|_E$ e $\varrho_{ijj}|_E = 0$.

A seguir serão representadas, em termos das quantidades não-equilíbrio ϱ_ε , $\varrho_{\langle ij \rangle}$, ϱ_{ijj} , Λ_ε , Λ_i , $\Lambda_{\langle ij \rangle}$, Λ_{jj} e λ_j , as funções densidade de entropia h e a conjugada do fluxo de entropia Φ_k .

A relação (3.2)₁ torna-se

$$\begin{aligned} dh = & \left(\Lambda_\varrho + \theta\Lambda_\varepsilon \frac{\partial h_0}{\partial \varrho} + \frac{\partial h_0}{\partial \varrho} + \frac{1}{3}\Lambda_{ii} \frac{\partial \varrho_{ss}|_E}{\partial \varrho} + \Lambda_\varepsilon g \right) d\varrho \\ & + \left(\theta\Lambda_\varepsilon \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + \frac{1}{3}\Lambda_{ii} \frac{\partial \varrho_{ss}|_E}{\partial \theta} \right) d\theta + \Lambda_{\langle ij \rangle} d\varrho_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{3}\Lambda_{ii} d\varrho_\varepsilon + \lambda_j d\varrho_{ijj}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Definimos a conjugada do fluxo de entropia Φ_k por

$$\hat{\Phi}_k = \Lambda q_k + \Lambda_i p_{ik} + \Lambda_{ij} p_{ijk} + \lambda_j p_{ijjk} - \Phi_k$$

e usamos as equações (3.2)₃, (3.5)₁, para termos que

$$d\hat{\Phi}_k = -\frac{1}{\theta^2} q_k d\theta + q_k d\Lambda_\varepsilon + p_{ik} d\Lambda_i + p_{\langle ij \rangle k} d\Lambda_{\langle ij \rangle} + \frac{1}{3} p_{iik} d\Lambda_{jj} + p_{ijjk} d\lambda_j, \quad (3.7)$$

ou seja, que $\hat{\Phi}_k = \hat{\Phi}_k(\varrho, \theta, \Lambda_\varepsilon, \Lambda_i, \Lambda_{\langle ij \rangle}, \Lambda_{jj}, \lambda_j)$, com $\hat{\Phi}_k$ independente de ϱ .

4. Equações Constitutivas

Para as equações constitutivas lineares, serão necessárias e suficientes as representações de h e $\hat{\Phi}_k$ mediante termos até segunda ordem.

Assumimos que ϱ_ε , $\varrho_{\langle ij \rangle}$, ϱ_{ij} , Λ_ε , Λ_i , $\Lambda_{\langle ij \rangle}$, Λ_{jj} e λ_j são quantidades pequenas de mesma ordem, o que facilita escrevermos as representações das funções isotrópicas h e $\hat{\Phi} = (\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \hat{\Phi}_3)$ até segunda ordem (veja [3]),

$$\begin{aligned} h &= h_0 + k_0 \varrho_\varepsilon + h_1 \varrho_{ij} \varrho_{nnj} + h_2 \varrho_{\langle ij \rangle} \varrho_{\langle ij \rangle} + h_3 \varrho_\varepsilon^2 + o(3), \\ \hat{\Phi}_k &= \alpha \lambda_k + \beta \Lambda_k + a_1 \Lambda_\varepsilon \lambda_k + b_1 \Lambda_\varepsilon \Lambda_k + a_2 \Lambda_{\langle ki \rangle} \lambda_i + b_2 \Lambda_{\langle ki \rangle} \Lambda_i \\ &\quad + a_3 \Lambda_{ii} \lambda_k + b_3 \Lambda_{ii} \Lambda_k + o(3), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde os coeficientes $k_0, h_n, \alpha, \beta, a_n, b_n$, são funções de (ϱ, θ) . A notação $o(n)$ representa termos de ordem maior ou igual a n nas quantidades ϱ_ε , $\varrho_{\langle ij \rangle}$, ϱ_{ij} , Λ_ε , Λ_i , $\Lambda_{\langle ij \rangle}$, Λ_{jj} e λ_j .

Comparamos (3.6) com (4.1)₁ e obtivemos as expressões

$$\begin{aligned} \lambda_j &= 2h_1 \varrho_{ij} + o(2), \\ \Lambda_{ii} &= 3k_0 + 6h_3 \varrho_\varepsilon + o(2), \\ \Lambda_{\langle ij \rangle} &= 2h_2 \varrho_{\langle ij \rangle} + o(2), \\ \Lambda_\varepsilon &= -2c_\theta h_3 \varrho_\varepsilon + o(2), \\ \Lambda_\varrho &= \left[\left(\theta \frac{\partial h_0}{\partial \varrho} + g \right) c_\theta - \frac{\partial \varrho_{ss}|_E}{\partial \varrho} \right] 2h_3 \varrho_\varepsilon + o(2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

para os multiplicadores de Lagrange, onde $c_\theta = \left(\frac{\partial h_0}{\partial \theta} \right)^{-1} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \varrho_{ss}|_E}{\partial \theta}$. Avaliamos (4.2)₂ no equilíbrio e vimos que $k_0 = 0$. Usamos (3.2)₂, para encontrarmos que

$$\Lambda_i = -\frac{10}{3} \frac{\varrho_{ss}|_E}{\varrho} h_1 \varrho_{jji} + o(2).$$

Comparamos (3.7) com (4.1)₂ e obtivemos as expressões

$$\begin{aligned} q_k &= -\theta^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \lambda_k + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \Lambda_k \right) + o(2), \\ q_k &= a_1 \lambda_k + b_1 \Lambda_k + o(2), \\ p_{ik} &= \beta \delta_{ik} + b_1 \Lambda_\varepsilon \delta_{ik} + b_2 \Lambda_{\langle ki \rangle} + b_3 \Lambda_{jj} \delta_{ik} + o(2), \\ p_{\langle ij \rangle k} &= a_2 \delta_{k\langle i} \lambda_j \rangle + b_2 \delta_{k\langle i} \Lambda_j \rangle + o(2), \\ p_{iik} &= 3a_3 \lambda_k + 3b_3 \Lambda_k + o(2), \\ p_{iijk} &= (\alpha + a_1 \Lambda_\varepsilon) \delta_{kj} + a_2 \Lambda_{\langle kj \rangle} + a_3 \Lambda_{ii} \delta_{kj} + o(2), \\ 0 &= \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \varrho} = \frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} \lambda_k + \frac{\partial \beta}{\partial \varrho} \Lambda_k + o(2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

para os fluxos. Logo por (3.4)₂, $\beta = p_0$.

As equações (4.3)_{1,2,7} implicam que

$$a_1 - \frac{5}{3} \frac{\varrho_{ss}|_E}{\varrho} b_1 = -\theta^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{5}{3} \frac{\varrho_{ss}|_E}{\varrho} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right), \quad 0 = \frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} - \frac{5}{3} \frac{\varrho_{ss}|_E}{\varrho} \frac{\partial p_0}{\partial \varrho}.$$

A parte linear da simetrização sem traço, e do traço de (3.2)₄, reduzem-se respectivamente a

$$b_2 = -2p_0\theta, \\ \varrho \frac{\partial \varrho_{ss}|_E}{\partial \varrho} - \varrho_{ss}|_E + (c_\theta - 2)\beta = \frac{1}{\theta}(3b_3 - c_\theta b_1) + \varrho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} c_\theta.$$

A partir do *tensor viscoso* S_{ij} , definido em (3.5)₃, é definida a *pressão dinâmica* $p_d = -\frac{1}{3}S_{kk}$. Pelas relações (3.5)₃, (4.3)₃ e (4.2)_{2,3,4}, tem-se

$$p_{ij} = (p_0 + p_d)\delta_{ij} - S_{\langle ij \rangle} \quad \text{e} \quad p_d = (3b_3 - c_\theta b_1)2h_3\varrho_\varepsilon + o(2).$$

A equação (4.3)₇ escrita mediante termos de segunda ordem, implica que

$$h_2 \left(\frac{\partial a_2}{\partial \varrho} - \frac{5}{3} \frac{\varrho_{ss}|_E}{\varrho} \frac{\partial b_2}{\partial \varrho} \right) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \beta}{\partial \varrho} = 0, \\ \frac{5}{3} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \beta}{\partial \varrho} + 2c_\theta h_3 \left(\frac{\partial a_1}{\partial \varrho} - \frac{5}{3} \frac{\varrho_{ss}|_E}{\varrho} \frac{\partial b_1}{\partial \varrho} \right) - 6h_3 \left(\frac{\partial a_3}{\partial \varrho} - \frac{5}{3} \frac{\varrho_{ss}|_E}{\varrho} \frac{\partial b_3}{\partial \varrho} \right) = 0.$$

Definindo $A_i = a_i - \frac{5}{3} \frac{\varrho_{ss}|_E}{\varrho} b_i$, as equações (4.3) tornam-se as seguintes equações constitutivas lineares em termos dos campos básicos $(\varrho, \theta, q_k, S_{\langle ik \rangle}, p_d)$:

$$\varrho_{iik} = \frac{1}{2A_1 h_1} q_k, \quad p_{ijk} = \frac{A_2}{A_1} q_{\langle i} \delta_{j \rangle k} + \frac{A_3}{A_1} q_k \delta_{ij}, \\ \varrho_{\langle ik \rangle} = \frac{1}{4p_0 \theta h_2} S_{\langle ik \rangle}, \quad p_{iijk} = \left(\alpha + \frac{3a_3 - c_\theta a_1}{3b_3 - c_\theta b_1} p_d \right) \delta_{jk} + \frac{a_2}{2p_0 \theta} S_{\langle jk \rangle}. \quad (4.4)$$

5. Concavidade da Densidade de Entropia

Além da condição (3.3), para que Σ seja mínima no equilíbrio, é exigido também que $\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial X_A \partial X_B} \Big|_E \geq 0$, onde X_A é da forma $(\Lambda_\varrho, \Lambda_\varepsilon, \Lambda_{ij}, \lambda_j)$.

As funções π_{ij} e π_{iij} dependem de $(\Lambda_\varrho, \Lambda_\varepsilon, \Lambda_{ij}, \lambda_j)$. Então as representações lineares de π_{ij} e π_{iij} são dadas por

$$\pi_{ij} = r_1 \Lambda_{ij} + o(2), \quad \pi_{iij} = \tau \lambda_j + o(2),$$

onde r_1 e τ são funções de (ϱ, θ) com

$$r_1 > 0 \quad \text{e} \quad \tau > 0. \quad (5.1)$$

A hipótese, $h(\mathbf{u})$ ser côncava na variável \mathbf{u} , admitida na Seção 3, equivale a afirmar que o sistema (3.1) é hiperbólico simétrico, ou ainda que $\delta \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{u} < 0$ para todas as variações $\delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{u}$. É desenvolvido o produto interno $\delta \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{u}$ usando que $\delta \mathbf{A} = (\delta \hat{\lambda}_\varrho, \delta \hat{\Lambda}_i, \delta \hat{\Lambda}, \delta \hat{\Lambda}_{ij}, \delta \hat{\lambda}_j)$ e $\delta \mathbf{u} = (\delta \varrho, \delta(\varrho v_i), \delta(\varrho e), \delta F_{ij}, \delta F_{iij})$, e obtido

$$h_1 < 0, \quad h_2 < 0, \quad h_3 < 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \varrho} > 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} > 0. \quad (5.2)$$

A relação (5.2)₅ implica $\frac{\partial h_0}{\partial \theta} > 0$, além de mostrar que o calor específico $c_v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}$ a volume constante, é positivo. As definições de g , ψ e η_0 implicam $\frac{\partial p_0}{\partial \varrho} = \varrho \frac{\partial g}{\partial \varrho} > 0$, ou seja, que a compressibilidade isotérmica também é positiva.

6. Equações Diferenciais dos Campos

Substituindo as equações constitutivas (4.4) nas equações de balanço (2.2), será obtido um sistema de equações diferenciais parciais quase-linear para os campos ϱ , θ , v_i , p_d , $S_{\langle ij \rangle}$, q_j . O campo de equações será linearizado ao excluir todos os termos não lineares, tais como produtos de p_d , q_j , $S_{\langle ij \rangle}$ com as derivadas de ϱ , θ e v_i . Isto fornecerá as últimas equações para um fluido viscoso condutor de calor. A saber,

$$\begin{aligned} -S_{\langle ij \rangle} &= \tau_s \dot{S}_{\langle ij \rangle} - 2\mu \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} - 2\mu K \frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}}, \\ -p_d &= \tau_\pi \dot{p}_d + \nu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - NL \frac{\partial q_k}{\partial x_k}, \\ -q_j &= \tau_q \dot{q}_j + \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \kappa L \theta \frac{\partial p_d}{\partial x_j} - \kappa K \theta \frac{\partial S_{\langle jk \rangle}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde foram introduzidas as seguintes notações para os coeficientes:

$$\tau_s = -\frac{1}{2h_2 r_1}, \quad \tau_\pi = -\frac{1}{6r_1 h_3}, \quad \tau_q = -\frac{1}{2h_1 \tau}, \quad (6.2)$$

para os *tempos de relaxamento do tensor cizalhante, do fluxo de calor e da pressão dinâmica*, e

$$\mu = \frac{2p_0^2 \theta}{r_1}, \quad \kappa = \frac{A_1^2}{\theta^2 \tau}, \quad \nu = \frac{1}{3\theta r_1} (3b_3 - c_\theta b_1)^2, \quad (6.3)$$

para a *viscosidade cizalhante*, a *condutividade térmica* e a *viscosidade volumétrica* respectivamente, e três funções *térmico-viscosa*,

$$K = \frac{A_2}{2p_0 A_1}, \quad L = \frac{\theta}{A_1} \frac{3A_3 - c_\theta A_1}{3b_3 - c_\theta b_1}, \quad N = \nu. \quad (6.4)$$

A partir das desigualdades (5.1), (5.2)_{1,2,3} tem-se: $\tau_s > 0$, $\tau_\pi > 0$, $\tau_q > 0$, $\mu > 0$, $\kappa > 0$, e $N = \nu \geq 0$. Kremer em [1], já havia mostrado a não negatividade da viscosidade volumétrica para gases ideais usando uma teoria termodinâmica estendida com 17 momentos. Aqui, em uma teoria de 14 momentos com uma formulação diferente, foi possível mostrar o mesmo para fluidos viscosos com condução de calor.

7. Gases Ideais

O caso em que a densidade de momento $\varrho_{i_1 \dots i_n}$ e o fluxo de momento $p_{i_1 \dots i_n}$ são idênticos representa uma teoria para gases ideais [4], [5]. Por isso, vale que $\varrho_{ss}|_E = p_{ss}|_E = 3p_0$.

Num gás ideal, já é conhecida a relação $\varepsilon = \frac{n p_0}{2 \varrho}$ onde n representa o grau de liberdade molecular, que por sua vez, é igual a 3 para gases ideais monatômicos, 5 para diatômicos e 6 para poliatômicos. Mais ainda, para gases ideais, a equação de estado é dada por $p_0 = R\varrho\theta$, onde $R = k/m$ é constante, m é a massa atômica e k é a constante de Boltzmann.

Os coeficientes citados em (6.2), (6.3) e (6.4) são explicitados abaixo:

$$\begin{aligned} \tau_s &= \frac{2}{r_1} R \varrho \theta^2, & \tau_\pi &= \frac{2}{r_1} \frac{n-3}{n} R \varrho \theta^2, & \tau_q &= \frac{10}{\tau} R^2 \varrho \theta^3, \\ \mu &= \frac{2}{r_1} R^2 \varrho^2 \theta^3, & \kappa &= \frac{25}{\tau} R^4 \varrho^2 \theta^4, & \nu &= \frac{4}{3r_1} \left(\frac{3-n}{n} \right)^2 R^2 \varrho^2 \theta^3, \\ K &= \frac{2}{5} \frac{1}{R \varrho \theta}, & L &= -\frac{1}{R \varrho \theta}, & N &= \nu. \end{aligned}$$

Então $\nu = N = 0$ somente para gases ideais monatômicos.

8. Ondas Harmônicas

Serão consideradas agora ondas harmônicas planas de amplitude pequena, a saber,

$$\varrho = \tilde{\varrho} + \bar{\varrho}E, \quad v_i = \tilde{v}_i E, \quad \theta = \tilde{\theta} + \bar{\theta}E, \quad S_{(ij)} = \tilde{S}_{(ij)}E, \quad p_d = \bar{p}_d E, \quad q_i = \bar{q}_i E, \quad (8.1)$$

onde $(\tilde{\varrho}, 0, \tilde{\theta}, 0, 0, 0)$ é um estado do gás em equilíbrio. Para um campo genérico f , \tilde{f} denota uma pequena amplitude complexa da propagação de uma pequena perturbação. Mais adiante \tilde{f} denotará um campo f avaliado no equilíbrio $(\varrho, \theta) = (\tilde{\varrho}, \tilde{\theta})$. Nas relações acima, $E = e^{i(\omega t - k \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}$, onde ω é a frequência, k é o número de onda (k complexo), \mathbf{n} a direção da propagação de onda ou normal da onda e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. A velocidade de fase da onda V_{ph} e a atenuação α são definidas por

$$V_{ph} = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} \quad \text{e} \quad \alpha = -\text{Im}(k). \quad (8.2)$$

Admitimos (8.1) como solução para o sistema de equações formado pelas equações (2.1) e (6.1) e desprezamos os termos de ordem dois, tais como os produtos entre $\tilde{\varrho}$, \tilde{v}_i , $\tilde{\theta}$, $\tilde{S}_{(ij)}$, \tilde{p}_d , \tilde{q}_i . Consideramos o caso de propagação longitudinal na direção $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ e com $\mathbf{v} = (v_1, 0, 0)$. Neste caso particular, o sistema fica reduzido a um sistema linear $\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Para obter solução diferente da trivial, o determinante da matriz \mathbf{C} deve ser nulo. Esta condição é conhecida como relação de dispersão, pela qual pode-se calcular a velocidade de fase V_{ph} e a atenuação α em termos da frequência ω . O estudo foi restringido aos casos de frequência alta e baixa em que é usado a fórmula de Taylor para aproximar k/ω por um polinômio.

8.1. Gases ideais monatômicos

Frequência Alta: Para ω grande, as definições de velocidade de fase e atenuação

(8.2) tornam-se

$$\begin{aligned}\pm V_{ph} &= \sqrt{\frac{15}{13 \pm \sqrt{94}}} \sqrt{\frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\varrho}}} \left(1 - \gamma_2 \frac{1}{\omega^2} \right), \\ \pm \alpha &= \sqrt{\frac{15}{13 \pm \sqrt{94}}} \sqrt{\frac{\tilde{\varrho}}{\tilde{p}_0}} \left[\left(\frac{1}{27} \mp \frac{\sqrt{94}}{1269} \right) \frac{1}{\tilde{\tau}_s} + \left(\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{94}}{47} \right) \frac{1}{\tilde{\tau}_q} + \gamma_3 \frac{1}{\omega^2} \right].\end{aligned}$$

Em cada expressão acima, no membro direito, as operações são realizadas todas com o sinal superior ou todas com o sinal inferior. O sinal \pm do membro esquerdo significa que há 4 valores para a velocidade de fase e 4 para a atenuação. Os coeficientes γ_2 e γ_3 são funções dependentes de $\tilde{\tau}_s$ e $\tilde{\tau}_q$.

Fazendo a frequência ω tender para o infinito e admitindo a *relação Maxwelliana* $\tilde{\tau}_s/\tilde{\tau}_q = 2/3$ (veja [6]), obtivemos os mesmos valores obtidos em [6] para velocidade de fase e atenuação de uma onda, para o caso monatômico.

Frequência Baixa: Neste segundo caso, ω é próximo de zero e por (8.2), tem-se

$$\begin{aligned}\pm V_{ph} &= \sqrt{\frac{5\tilde{p}_0}{3\tilde{\varrho}}} \left(1 + \frac{1}{50}(16\tilde{\tau}_s - \tilde{\tau}_q)(2\tilde{\tau}_s + \tilde{\tau}_q)\omega^2 \right), \\ \pm \alpha &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{3\tilde{\varrho}}{5\tilde{p}_0}} (2\tilde{\tau}_s + \tilde{\tau}_q)\omega^2.\end{aligned}$$

Liu e Müller já haviam mostrado em [5] resultados coerentes com os acima. As outras possibilidades para velocidade de fase e atenuação são

$$\begin{aligned}\pm V_{ph} &= \sqrt{2\tilde{\tau}_q} \sqrt{\frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\varrho}}} \left(\omega^{1/2} - \frac{7}{10}\tilde{\tau}_q\omega^{3/2} \right), \\ \mp \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2\tilde{\tau}_q}} \sqrt{\frac{\tilde{\varrho}}{\tilde{p}_0}} \left(\omega^{1/2} - \frac{7}{10}\tilde{\tau}_q\omega^{3/2} \right).\end{aligned}$$

Neste caso, $\lim_{\omega \rightarrow 0} V_{ph} = 0$, $\lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha = 0$. Liu já havia mostrado em [5] que $\lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha = 0$.

8.2. Gases ideais diatômicos, poliatômicos e outros

Para simplificar, escreveremos abaixo $\gamma_i(n)$ em lugar de funções racionais em n e dependentes de $\tilde{\tau}_s$ e $\tilde{\tau}_q$.

Frequência Alta: Da definição de velocidade de fase e atenuação (8.2), tem-se

$$\begin{aligned}\pm V_{ph} &= \sqrt{\frac{15}{13 \pm \sqrt{94}}} \sqrt{\frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\varrho}}} \left(1 - \gamma_2(n) \frac{1}{\omega^2} \right), \\ \pm \alpha &= \sqrt{\frac{15}{13 \pm \sqrt{94}}} \sqrt{\frac{\tilde{\varrho}}{\tilde{p}_0}} \left(\frac{8413 \pm 451\sqrt{94}}{42300} \frac{1}{\tilde{\tau}_s} + \frac{47 \pm 4\sqrt{94}}{188} \frac{1}{\tilde{\tau}_q} + \gamma_3(n) \frac{1}{\omega^2} \right).\end{aligned}$$

Ao fazer ω tender para o infinito, a velocidade de fase obtida neste caso coincide com a velocidade de fase obtida no caso monatômico (frequência alta).

Frequência Baixa: Segundo (8.2),

$$\begin{aligned}\pm V_{ph} &= \sqrt{\frac{10\tilde{\tau}_q}{n+2} \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\varrho}}} \left(-\omega^{1/2} - \gamma_4(n)\omega^{3/2} \right), \\ \mp \alpha &= \sqrt{\frac{n+2}{10\tilde{\tau}_q} \frac{\tilde{\varrho}}{\tilde{p}_0}} \left(\omega^{1/2} + \gamma_4(n)\omega^{3/2} \right).\end{aligned}$$

Ao fazer $n = 3$, obtemos a velocidade de fase e a atenuação do caso monatômico.

As outras possibilidades para a velocidade de fase e atenuação são

$$\pm V_{ph} = \sqrt{\frac{n+2}{n}} \sqrt{\frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\varrho}}} (1 + \gamma_5(n)\omega^2), \quad \pm \alpha = \sqrt{\frac{n}{n+2}} \sqrt{\frac{\tilde{\varrho}}{\tilde{p}_0}} \gamma_6(n)\omega^2.$$

Ao fazer $n = 3$, obtemos os mesmos valores que no caso monatômico a menos do coeficiente $\gamma_5(n)$. Era esperado obter $V_{ph} = \sqrt{\gamma \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\varrho}}}$ para $\omega \rightarrow 0$, com a razão entre o calor específico a pressão constante e o calor específico a volume constante $\gamma = c_p/c_v = 5/3$ para gases ideais monatômicos, $\gamma = 7/5$ para diatômicos, e $\gamma = 4/3$ para poliatômicos, correspondentes com a termodinâmica clássica.

Referências

- [1] G.M. Kremer, Extended thermodynamics of molecular ideal gases, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **1** (1989), 3-20.
- [2] I-Shih Liu, Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **46** (1972), 131-148.
- [3] I-Shih Liu, "Continuum Mechanics", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (2002).
- [4] I-Shih Liu, G.M. Kremer, Hyperbolic System of Field Equations for Viscous Fluids, *Mat. Aplic. Comp.*, **9** (1990), 123-135.
- [5] I-Shih Liu, I. Müller, Extended thermodynamics of classical and degenerate gases, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **83** (1983), 285-332.
- [6] I. Müller, T. Ruggeri, "Rational Extended Thermodynamics", Second Edition, Springer-Verlag New York (1998).