

Escoamento de Calor Representado pela Equação de Laplace e a Transformada de Fourier em Seno e Cosseno

J. C. ARAÚJO e R. G. MÁRQUEZ

Recebido em 2 de abril de 2018 / Aceito em 25 de outubro de 2018

RESUMO. Nesse artigo a equação de Laplace foi utilizada para representar uma distribuição de temperaturas estacionárias no primeiro quadrante no plano cartesiano com diferentes condições de fronteira, tendo sido examinada com detalhes, a luz da transformada de Fourier em seno e cosseno. Após obter a solução formal para cada exemplo, foi possível, usando as equações de Cauchy-Riemann obter cada campo de escoamento de calor. Em um dos exemplos analisados, o campo de velocidade do escoamento tem a forma de um vórtice livre com centro na origem, e desse modo, foi estabelecida uma relação adimensional entre a magnitude do vórtice e a condição de Dirichlet imposta na fronteira. Um exemplo, em particular, foi incluído para mostrar a limitação do uso do método utilizado nesse estudo para a obtenção de soluções explícitas para a equação de Laplace.

Palavras-chave: Equação de Laplace, isoterma, distribuição de temperatura, intensidade do vórtice livre.

1 INTRODUÇÃO

Segundo Debnath e Bhatta [10], a transformada de Fourier em seno e cosseno constituem um método operacional eficiente para resolver algumas equações diferenciais parciais que aparecem notadamente em estudos avançados e na pesquisa, como por exemplo, a equação de Laplace que em sua versão bidimensional [7] é dada por

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (1.1)$$

Entre outras aplicações, a equação de Laplace pode ser usada na análise dos campos eletrostáticos, onde a função potencial elétrico em um meio dielétrico, sem cargas elétricas, obedece à equação (1.1) de acordo com as dimensões espaciais [3]. Em um escoamento bidimensional incompressível e irrotacional de um campo de velocidades de um fluido, a função de corrente e

*Corresponding author: Jorge Corrêa de Araújo – E-mail: jcaraujo_55@yahoo.com.br – <https://orcid.org/0000-0003-3465-569X>

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, FFP, Rua Dr. Francisco Portela, 1470 – Patronato CEP: 24435-005. São Gonçalo, RJ, Brasil. E-mails: jcaraujo_55@yahoo.com.br, rosagmarquez@yahoo.com.br

de potencial do campo satisfazem a equação de Laplace [11]. Entre os métodos disponíveis para lidar com a equação de Laplace em um quarto do plano, a transformada de Fourier em seno e cosseno são vantajosas, pois reduzem a equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem. Já para resolver a equação de Laplace no plano xy , onde x ou y é finito o método de separação de variáveis pode ser adotado como foi utilizado por Iório [12] ou ainda, usando a série de Fourier dupla como pode ser visto em Carslaw e Jaeger [5]. Castro [6] usou as transformadas de Fourier em seno e cosseno para estudar um potencial delta duplo com base na equação de Schrödinger. Também Negero [13] utilizou a transformada de Fourier em seno para obter a solução formal da equação de Laplace em um meio plano, entre outros exemplos de interesse analisados no referido estudo.

Debnath e Bhatta [10] adotaram esse método para resolver a equação de Laplace em um quarto de plano com condições de fronteira constante usando a transformada de Fourier em seno. Uma descrição detalhada da aplicação da transformada de Fourier em seno e cosseno para equações diferenciais parciais, incluindo a equação de Laplace, é apresentada por Trim [14]. Entretanto, são poucos os trabalhos e livros que relacionam a solução dessa equação com o campo de escoamento de calor como fazem Brown e Churchill [4]. Nesse sentido, o foco principal desse artigo é resolver com detalhes a equação de Laplace na representação de distribuição de temperaturas em uma placa homogênea delgada bidimensional com diferentes condições de fronteiras do tipo Dirichlet e Neumann usando a transformada de Fourier em seno e cosseno, de modo a relacionar cada solução da equação, com a sua harmônica conjugada para obter informações sobre o campo de velocidade de cada escoamento de calor analisado. Um dos exemplos tem o escoamento de calor na forma de um vórtice livre, e desse modo, uma relação adimensional pode ser estabelecida entre a magnitude do vórtice e a condição de Dirichlet sobre a fronteira.

Observação: Um vórtice irrotacional é um escoamento giratório, onde as linhas de corrente apresentam um padrão circular ou espiral e vão se distanciando à medida em que se afastam do centro.

2 MÉTODOS

Nesta seção são apresentadas as equações de Cauchy-Riemann e o teorema da convolução da transformada de Fourier em cosseno. No apêndice, são definidas as transformadas de Fourier em seno e cosseno.

2.1 Harmônicas Conjugadas

Diz-se que as funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são funções harmônicas em um domínio D se ambas tem derivadas parciais contínuas de primeira e segunda ordem em D e satisfazem a equação de Laplace dada pela equação (1.1). Além disso, se suas derivadas de primeira ordem satisfazem as equações de Cauchy-Riemann [4], isto é,

$$u_x = v_y \text{ e } u_y = -v_x, \quad (2.1)$$

então $v(x, y)$ é uma conjugada harmônica da função $u(x, y)$.

A função potencial complexa do escoamento é dada por $\psi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde o conjugado da função $\frac{d\psi}{dz} = u_x + iv_x$, nos dá o campo de velocidade $\vec{V}(x, y) = (u_x, u_y) = \nabla u$ (Brown e Churchill [4])

Teorema 2.1. (Teorema da Convolução) Se $f = \mathbf{F}_c^{-1}\{F\}$ e $g = \mathbf{F}_c^{-1}\{G\}$, onde $\mathbf{F}_c^{-1}\{F\}$ e $\mathbf{F}_c^{-1}\{G\}$ denotam as transformadas de Fourier inversa em cosseno respectivamente de F e G , então

$$\mathbf{F}_c^{-1}\{FG\}_{(x)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty f(v)[g(x-v) + g(x+v)]dx,$$

desde que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções pares quando estendidas a $x < 0$ [14].

3 EXEMPLOS

Nos exemplos a seguir, a equação (1.1) é usada para a representação de distribuição de temperaturas, $u(x, y)$ em regime estacionário como uma placa bidimensional delgada Ω , onde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$. Estamos supondo que a placa encontra-se em isolamento térmico na direção do eixo z . Desse modo, não há presença de fontes ou poços [4]. Além disso, são admitidas as seguintes condições suplementares: $u \in C^2(\Omega)$; $u, u_x \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$ ou $u_y \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \infty$.

Exemplo 1:

Vamos admitir a equação (1.1) com as condições de fronteira dadas por

$$u(x, 0) = f(x), \quad x > 0 \tag{3.1}$$

$$u(0, y) = g(y), \quad y > 0 \tag{3.2}$$

As condições dadas pelas equações (3.1),(3.2) são chamadas condições de Dirichlet. De modo a facilitar a obtenção da solução para o problema proposto, usaremos o princípio de superposição de soluções de equações diferenciais parciais lineares (EDP) para expressar $u(x, y)$ como a soma de duas funções $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ satisfazendo respectivamente as equações:

$$u_{1xx} + u_{1yy} = 0; \quad u_1(x, y) \in \Omega \tag{3.3}$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad x > 0 \tag{3.4}$$

$$u_1(0, y) = g(y), \quad y > 0 \tag{3.5}$$

e

$$u_{2xx} + u_{2yy} = 0; \quad u_2(x, y) \in \Omega \tag{3.6}$$

$$u_2(x, 0) = f(x), \quad x > 0 \tag{3.7}$$

$$u_2(0, y) = 0, \quad y > 0 \tag{3.8}$$

Aplicando a transformada de Fourier em seno, \mathbf{F}_s , na variável y na equação (3.3) e usando a linearidade da mesma tem-se

$$\frac{d^2 U_1(x, \xi)}{dx^2} - \xi^2 U_1(x, \xi) + \xi u_1(x, 0) = 0, \quad (3.9)$$

onde $U_1 = U_1(x, \xi) = \mathbf{F}_s\{u_1(x, y)\}$.

Das equações (3.4) e (3.9) temos que para cada $\xi > 0$ fixado, uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea na variável x dada por

$$\frac{d^2 U_1(x, \xi)}{dx^2} - \xi^2 U_1(x, \xi) = 0. \quad (3.10)$$

A solução da equação (3.10) pode ser resolvida usando métodos conhecidos ([3], [1]) obtendo assim,

$$U_1(x, \xi) = c_1 e^{-\xi x} + c_2 e^{\xi x}, \quad (3.11)$$

onde c_1 e c_2 são duas constantes arbitrárias. Para que $U_1(x, \xi)$ permaneça limitada quando $x \rightarrow \infty$ devemos fazer $c_2 = 0$. Logo a equação (3.11) pode ser escrita como

$$U_1(x, \xi) = c_1 e^{-\xi x}, \quad (3.12)$$

onde c_1 pode ser obtido aplicando \mathbf{F}_s na equação (3.5), isto é,

$$U_1(0, \xi) = \mathbf{F}_s\{u_1(0, y)\} = \mathbf{F}_s\{g(y)\} = G(\xi). \quad (3.13)$$

Das equações (3.12) e (3.13) resulta

$$U_1(x, \xi) = G(\xi) e^{-\xi x}. \quad (3.14)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier em seno, com relação à variável y $\{\mathbf{F}_s^{-1}\}_{(y)}$ na equação (3.14) tem-se

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G(\xi) e^{-\xi x} \text{sen}(\xi y) d\xi. \quad (3.15)$$

Procedendo de modo análogo para as equações (3.6), (3.7) e (3.8) aplicamos $\{\mathbf{F}_s\}$ na variável x na equação (3.6) para obter

$$\frac{d^2 U_2(\xi, y)}{dy^2} - \xi^2 U_2(\xi, y) + \xi u_2(0, y) = 0, \quad (3.16)$$

onde $U_2 = U_2(\xi, y) = \mathbf{F}_s\{u_2(x, y)\}$.

Das equações (3.8) e (3.16) temos que para cada $\xi > 0$ fixado, uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea na variável y é dada por

$$\frac{d^2 U_2(\xi, y)}{dy^2} - \xi^2 U_2(\xi, y) = 0. \quad (3.17)$$

A solução geral da equação (3.17) tem a forma,

$$U_2(\xi, y) = d_1 e^{-\xi y} + d_2 e^{\xi y}, \tag{3.18}$$

onde d_1 e d_2 são constantes arbitrárias.

Novamente, para que $U_2(\xi, y)$ permaneça limitada quando $y \rightarrow \infty$ devemos considerar $d_2 = 0$. Logo a equação (3.18) pode ser escrita como

$$U_2(\xi, y) = d_1 e^{-\xi y}, \tag{3.19}$$

onde d_1 pode ser obtido aplicando \mathbf{F}_s na equação (3.7), isto é,

$$U_2(\xi, 0) = \mathbf{F}_s\{u_2(x, 0)\} = \mathbf{F}_s\{f(x)\} = \mathbf{F}(\xi). \tag{3.20}$$

Das equações (3.19) e (3.20) obtém-se

$$U_2(\xi, y) = F(\xi) e^{-\xi y}. \tag{3.21}$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier em seno, $\{\mathbf{F}_s^{-1}\}_{(x)}$ na equação (3.21) tem-se

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\xi y} \text{sen}(\xi x) d\xi. \tag{3.22}$$

Das equações (3.15) e (3.22) resulta a solução formal $u(x, y)$ do exemplo (1) dada por

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty G(\xi) e^{-\xi x} \text{sen}(\xi y) d\xi + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(\xi) e^{-\xi y} \text{sen}(\xi x) d\xi. \tag{3.23}$$

A seguir, veremos dois casos particulares do exemplo 1 em que a equação (3.23) pode ser efetivamente calculada.

Caso 1: Vamos supor que as condições de temperaturas na fronteira Ω são dadas por

$$u(x, 0) = f(x) = b; x > 0 \text{ e } u(0, y) = g(y) = a; y > 0, \tag{3.24}$$

onde a e b são duas constantes reais positivas; $a \neq b$. Para determinar a solução da equação de Laplace com as condições dadas no caso (1), necessitamos da transformada de Fourier em seno da função constante, que não é apresentada na literatura, como por exemplo em [5], [8], [9], [10] e [14]. Vamos provar que

$$\mathbf{F}_s\{c\} = \frac{c}{\xi}, \tag{3.25}$$

onde c é uma constante real. De fato,

$$\mathbf{F}_s^{-1}\left\{\frac{c}{\xi}\right\} = \frac{2c}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\xi x)}{\xi} d\xi = \frac{2c}{\pi} \frac{\pi}{2} = c. \tag{3.26}$$

A integral imprópria $\int_0^\infty \frac{\text{sen}(\xi x)}{\xi} d\xi$ pode ser vista em ([2]).

Das equações (3.23) e (3.25) tem-se

$$u(x,y) = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi x} \text{sen}(\xi y)}{\xi} d\xi + \frac{2b}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi y} \text{sen}(\xi x)}{\xi} d\xi. \tag{3.27}$$

Segundo Churchill (Tabela D.1) [8]

$$\mathbf{F}_s^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-c\alpha}}{\alpha} \right\}_{(x)} = \frac{2}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{c}{x} \right); c > 0. \tag{3.28}$$

Usando a linearidade da transformada inversa de Fourier \mathbf{F}^{-1} em seno, e das equações (3.25) e (3.28) obtemos

$$\mathbf{F}_s^{-1} \left\{ \frac{e^{-c\alpha}}{\alpha} \right\}_{(x)} = 1 - \frac{2}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{c}{x} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-c\alpha} \text{sen}(\alpha x)}{\alpha} d\alpha. \tag{3.29}$$

Assim,

$$\mathbf{F}_s^{-1} \left\{ \frac{e^{-\xi x}}{\xi} \right\}_{(y)} = 1 - \frac{2}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi x} \text{sen}(\xi y)}{\xi} d\xi, \tag{3.30}$$

e

$$\mathbf{F}_s^{-1} \left\{ \frac{e^{-\xi y}}{\xi} \right\}_{(x)} = 1 - \frac{2}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi y} \text{sen}(\xi x)}{\xi} d\xi. \tag{3.31}$$

Das equações (3.27), (3.30) e (3.31) tem-se

$$u(x,y) = a + b - \frac{2}{\pi} \left[a \text{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) + b \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right] \tag{3.32}$$

ou ainda, usando a identidade trigonométrica $\text{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$ resulta

$$u(x,y) = \frac{2(a-b)}{\pi} \left[\text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right] + b. \tag{3.33}$$

A equação (3.33) é verificável, isto é, satisfaz a equação de Laplace na região Ω e as condições de fronteira dadas em (3.24).

Fazendo $b = 0$ na equação (3.33) a solução obtida coincide com a da equação de Laplace em um quarto de plano proposto por Debnath e Bhatta [10] com as condições $u(x,0) = 0 = b$ e $u(0,y) = a$.

Das equações de Cauchy-Riemann tem-se que a harmônica conjugada $v(x,y)$ da função $u(x,y)$ é dada por

$$v(x,y) = \left(\frac{b-a}{\pi} \right) \ln(x^2 + y^2). \tag{3.34}$$

A função potencial complexa do escoamento [4] é dada por $\psi(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, onde $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são dados respectivamente pelas equações (3.33) e (3.34). Desde que o conjugado de $\frac{d\psi}{dz}$ dá o campo de velocidade do escoamento $\vec{V}(x,y)$ resulta que

$$\vec{V}(x,y) = -2 \left(\frac{a-b}{\pi} \right) \frac{y}{x^2+y^2} + 2i \left(\frac{a-b}{\pi} \right) \frac{x}{x^2+y^2}, \tag{3.35}$$

onde $\vec{V} = \nabla u$, portanto o campo de escoamento é conservativo, logo irrotacional. A velocidade escalar do campo do escoamento de calor é obtida da eq (3.35) por

$$V = \frac{2}{\pi} |a-b| \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}. \tag{3.36}$$

Da equação (3.36) tem-se que velocidade de escoamento é infinita próxima a origem. As curvas $u(x,y) = c_1$, sendo c_1 uma constante positiva são denominadas isotermas de temperaturas ([4]). Essas isotermas são lineares. De fato, da eq (3.33) tem-se $y = bx$, onde $b = \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{(c_1-b)}{(a-b)} \right)$ e $0 < c_1 < a$. Já as curvas $v(x,y) = c_2$, sendo c_2 uma constante positiva, são denominadas linhas de corrente ou linhas de escoamento de calor. Essas linhas de escoamento são arcos de circunferências concêntricas na origem no primeiro quadrante. De fato, da equação (3.34) tem-se $x^2 + y^2 = r^2$ onde $r^2 = e^{\frac{\pi c_2}{b-a}}$. Como as linhas de escoamento são circulares, forma-se um vórtice irrotacional [11]. Logo, as partículas fluidas de calor não giram durante o escoamento. Pode-se estabelecer uma relação adimensional entre K , a intensidade do vórtice com os parâmetros de temperaturas a e b . Para esse tipo de vórtice a função de corrente $v(x,y)$ é dada (Fox [11]) por

$$v(x,y) = \frac{K}{2\pi} \ln(x^2 + y^2)^{1/2} \tag{3.37}$$

ou

$$v(x,y) = \frac{K}{4\pi} \ln(x^2 + y^2). \tag{3.38}$$

Das equações (3.34) e (3.36) tem-se a relação (adimensional)

$$b - a = \frac{K}{4}, \tag{3.39}$$

$$\vec{V}(x,y) = \frac{K}{2\pi} \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right), \tag{3.40}$$

Se $a > b$, o campo \vec{V} é no sentido horário e caso contrário o campo gira no sentido anti-horário. A Fig. 1 mostra o perfil de isotermas de temperaturas e das linhas de escoamento em uma sub-região $\bar{\Omega} \subset \Omega$ próxima à origem para o caso $a = 1$ e $b = 5$. A Fig.2 mostra o campo de velocidade $\vec{V}(x,y)$ em uma sub-região $\bar{\Omega} \subset \Omega$ próxima a origem.

Caso 2: Vamos supor que as condições de temperaturas na fronteira Ω são dadas por

$$u(x,0) = f(x) = \frac{a}{x}; x > 0 \text{ e } u(0,y) = g(y) = b; y > 0 \tag{3.41}$$

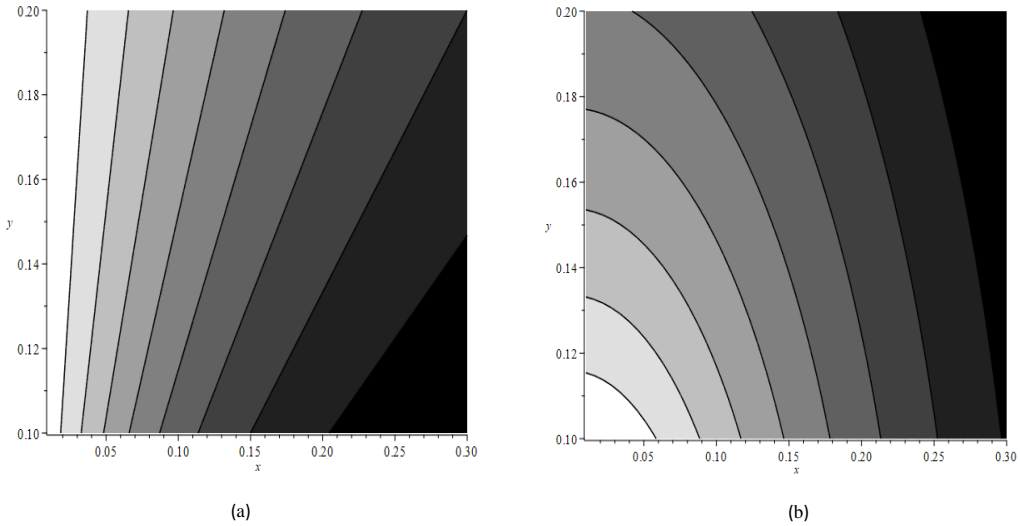


Figura 1: (a) Linhas isotermas de temperaturas e (b) Linhas de escoamento do **Caso 1**.

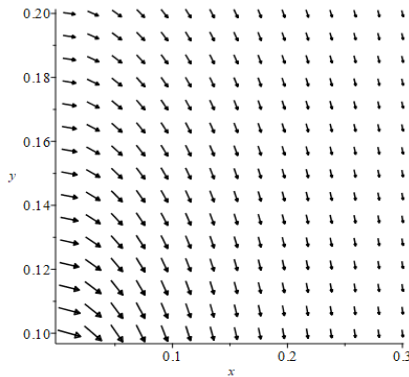


Figura 2: Campo de velocidade $\vec{V}(x,y)$ em $\bar{\Omega}$

A transformada de Fourier em seno, aplicada nas condições dadas por (3.41) resulta nas equações

$$F_s(\xi) = \frac{a\pi}{2}, \quad G_s(\xi) = \frac{b}{\xi}, \tag{3.42}$$

onde $F_s(\xi)$ é obtida da tabela apresentada por Churchill [8]. Das equações (3.23) e (3.42) tem-se a solução na forma

$$u(x,y) = \frac{2b}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi x} \text{sen}(\xi y)}{\xi} d\xi + a \int_0^\infty e^{-\xi y} \text{sen}(\xi x) d\xi. \tag{3.43}$$

A primeira integral da eq (3.43) pode ser calculada diretamente da equação (3.30) para obter

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\xi x} \text{sen}(\xi y)}{\xi} d\xi = \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right), \tag{3.44}$$

enquanto a segunda integral pode ser obtida a partir da fórmula proposta por Churchill [7] do seguinte modo

$$\mathbf{F}_s^{-1}\{e^{-\xi y}\}_{(x)} = \frac{2x}{\pi(x^2 + y^2)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\xi y} \text{sen}(\xi x) d\xi. \tag{3.45}$$

Das equações (3.43), (3.44) e (3.45) tem-se a solução para o problema com as condições caso 2 dada por

$$u(x, y) = \frac{2b}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) + a \frac{x}{x^2 + y^2}. \tag{3.46}$$

A equação (3.46) é verificável, isto é, satisfaz a equação de Laplace em Ω e as condições de fronteira estabelecidas na equação (3.41).

Das equações de Cauchy-Riemann tem-se que a harmônica conjugada da função $u(x, y)$ é dada por

$$v(x, y) = a \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{b}{\pi} \ln(x^2 + y^2). \tag{3.47}$$

Do conjugado de $\frac{d\psi}{dz}$ tem-se o campo de velocidade do escoamento $\vec{V}(x, y)$ dado por

$$\vec{V}(x, y) = \left[-\frac{2by^3 + 2bxy^2 - a\pi y^2 + a\pi x^2}{\pi(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2x(-by^2 - bx^2 + a\pi y)}{\pi(x^2 + y^2)^2} \right]. \tag{3.48}$$

onde $\vec{V}(x, y) = \nabla u$. A velocidade escalar do campo do escoamento de calor é obtida da eq (3.48) por

$$V = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}. \tag{3.49}$$

onde

$$u_x = -\frac{2by^3 + 2bxy^2 - a\pi y^2 + a\pi x^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} \text{ e } u_y = -\frac{2x(-by^2 - bx^2 + a\pi y)}{\pi(x^2 + y^2)^2}. \tag{3.50}$$

As isothermas de temperaturas $u(x, y) = c_1$, são dadas implicitamente por

$$\frac{2b}{\pi} \text{arctg} \frac{y}{x} + a \frac{x}{x^2 + y^2} = c_1, \tag{3.51}$$

enquanto as linhas de escoamento $v(x, y) = c_2$, são também dadas implicitamente na forma

$$v(x, y) = -a \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{b}{\pi} \ln(x^2 + y^2) = c_2. \tag{3.52}$$

Em particular, se $b = 0$, da equação (3.51) as isoterms são circunferências dadas pela equação

$$\left(x - \frac{a}{2c_1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2c_1}\right)^2, \tag{3.53}$$

com centro sobre o eixo x dado por $\left(\frac{a}{2c_1}, 0\right)$ e raio $\frac{a}{2c_1}$. Analogamente usando a eq (3.52) as linhas de escoamento são circunferências dadas pela equação

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2c_2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2c_2}\right)^2, \tag{3.54}$$

com centro sobre o eixo y dado por $\left(0, \frac{a}{2c_2}\right)$ e raio $\frac{a}{2c_2}$.

A Fig.(3) mostra o perfil de isoterms de temperaturas e das linhas de escoamento em uma sub-região Ω próximo à origem para o caso $a = 1$ e $b = 0$ do caso 2. A Fig.(4) mostra o campo de velocidade $\vec{V}(x, y)$ em uma sub-região $\bar{\Omega} \subset \Omega$ próxima a origem.

Caso 3: Vamos supor que as condições de temperaturas na fronteira de Ω (1.1) e (2.1) são dadas por

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{a}{x}; x > 0 \quad \text{e} \quad u(0, y) = g(y) = \frac{b}{y}; y > 0. \tag{3.55}$$

A transformada de Fourier em seno, aplicada nas condições dadas por (3.55) resulta nas equações

$$F_s(\xi) = \frac{a\pi}{2} \quad \text{e} \quad G_s(\xi) = \frac{b\pi}{2}. \tag{3.56}$$

Das equações (3.23) e (3.56) tem-se a solução na forma

$$u(x, y) = b \int_0^\infty e^{-\xi x} \text{sen}(\xi y) d\xi + a \int_0^\infty e^{-\xi y} \text{sen}(\xi x) d\xi. \tag{3.57}$$

As integrais da equação (3.57) podem ser calculadas diretamente da equação (3.45) para obter

$$u(x, y) = \frac{ax + by}{x^2 + y^2}. \tag{3.58}$$

A equação (3.58) é verificável, isto é, satisfaz a equação de Laplace em Ω e as condições de fronteira estabelecidas em (3.55). Das equações de Cauchy-Riemann, tem-se que a harmônica conjugada $v(x, y)$ da função $u(x, y)$ é dada por

$$v(x, y) = \frac{bx - ay}{x^2 + y^2}. \tag{3.59}$$

Como o conjugado da função $\frac{d\psi}{dz}$ nos dá o campo de velocidade do escoamento $\vec{V}(x, y)$, resulta que

$$\vec{V}(x, y) = \left[-\frac{2bxy - ay^2 + ax^2}{\pi(x^2 + y^2)^2}, -\frac{by^2 - bx^2 + 2axy}{\pi(x^2 + y^2)^2} \right]. \tag{3.60}$$

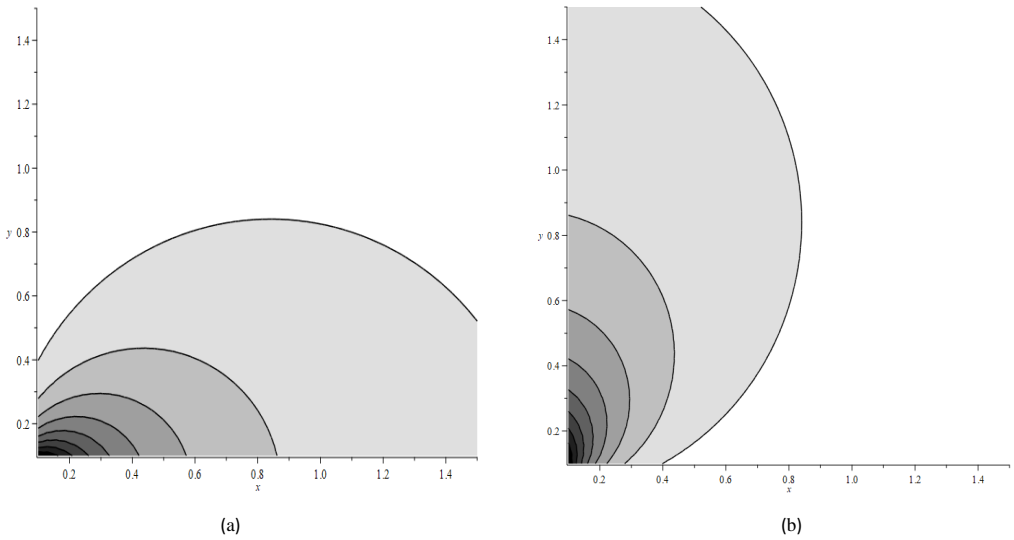


Figura 3: (a) Linhas isotermas de temperaturas e (b) Linhas de escoamento do exemplo **Caso 2**.

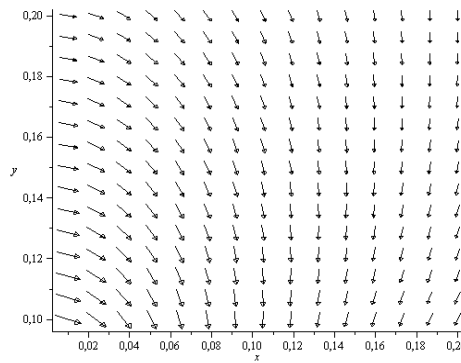


Figura 4: Campo de velocidade $\vec{V}(x, y)$ em $\bar{\Omega}$

onde

$$u_x = -\frac{2bxy - ay^2 + ax^2}{\pi(x^2 + y^2)^2} \text{ e } u_y = -\frac{by^2 - bx^2 + 2axy}{\pi(x^2 + y^2)^2}. \tag{3.61}$$

As isotermas de temperaturas, $u(x, y) = c_1$ são circunferências da forma

$$\left(x - \frac{a}{2c_1}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2c_1}\right)^2 = r^2, \tag{3.62}$$

com centro $C = \left(\frac{a}{2c_1}, \frac{b}{2c_1}\right)$ e raio $\frac{(a^2 + b^2)^{1/2}}{2c_1}$.

Assim, para cada $c_1 > 0$ constante, é associada uma isoterma circular. As linhas de escoamento, $v(x, y) = c_2$, com $c_2 > 0$ constante são também circunferências dadas por

$$\left(x - \frac{b}{2c_2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2c_2}\right)^2 = r^2, \tag{3.63}$$

com centro $C = \left(\frac{b}{2c_2}, \frac{a}{2c_2}\right)$ e raio $\frac{(a^2 + b^2)^{1/2}}{2c_2}$.

A Fig.(5) mostra o perfil de isotermas de temperaturas e das linhas de escoamento em uma sub-região Ω próximo à origem, considerando $a = 1$ e $b = 5$ do caso 3. A Fig.(6) mostra o campo de velocidade $\vec{V}(x, y)$ em uma sub-região $\bar{\Omega} \subset \Omega$ próxima à origem utilizando esses parâmetros.

Exemplo 2:

Nesse exemplo consideramos a equação de Laplace (1.1), com as condições de fronteiras do tipo Neumann e Dirichlet dadas por

$$u_y(x, 0) = f(x) = 0; x > 0 \text{ e } u(0, y) = g(y); y > 0. \tag{3.64}$$

Essas condições constituem um caso particular de um problema mais geral proposto por Trim [14]. É interessante notar que se forem adotadas as condições

$$u_x(0, y) = f(y) = 0; y > 0 \text{ e } u(x, 0) = g(x); x > 0, \tag{3.65}$$

as soluções são as mesmas. Aplicando a transformada de Fourier em cosseno na variável y na equação de Laplace resulta a equação diferencial ordinária na variável x dada por

$$\frac{d^2U(x, \xi)}{dx^2} = \xi^2U(x, \xi) + u_y(x, 0), \tag{3.66}$$

onde, $U = U_c(x, \xi) = \mathbf{F}_c\{u(x, y)\}$. Desde que $u_y(x, 0) = 0; x > 0$ obtemos

$$\frac{d^2U(x, \xi)}{dx^2} = \xi^2U(x, \xi), \tag{3.67}$$

cuja a solução geral é dada por

$$U(x, \xi) = c_1e^{-\xi x} + c_2e^{\xi x}. \tag{3.68}$$

Para que $U(\xi, y)$ permaneça limitada quando $x \rightarrow \infty$ devemos fazer $c_2 = 0$. Logo a equação (3.68) pode ser escrita como

$$U(x, \xi) = c_1e^{-\xi x}. \tag{3.69}$$

Desde que $\mathbf{F}_c\{u(0, y)\} = \mathbf{F}_c\{g(y)\} = U(0, \xi) = G(\xi)$, a equação (3.69) pode ser escrita na forma

$$U(x, \xi) = G(\xi)e^{-\xi x}, \tag{3.70}$$

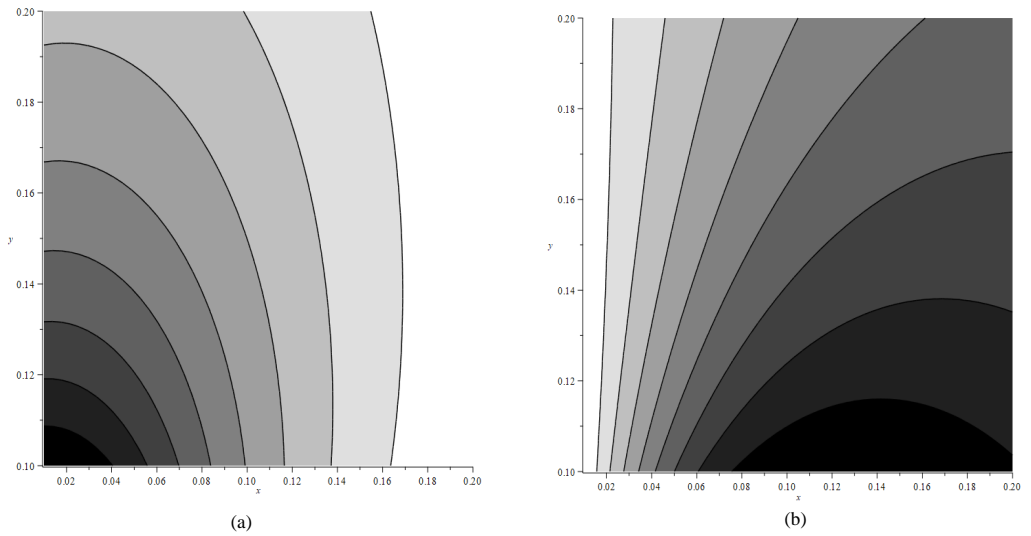


Figura 5: (a) Linhas isotermas de temperaturas e (b) Linhas de escoamento do exemplo Caso 3.

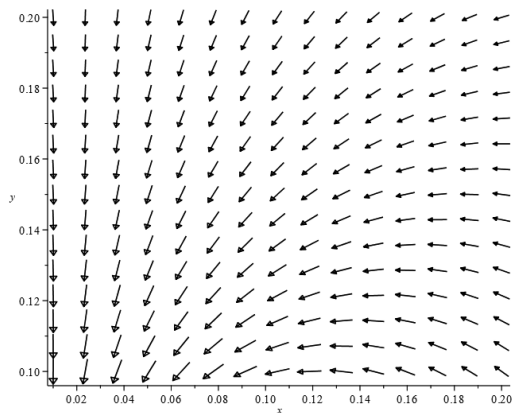


Figura 6: Campo de velocidade $\vec{V}(x, y)$ em $\bar{\Omega} \subset \Omega$

ou ainda como

$$U(x, \xi) = G(\xi)H(x), \tag{3.71}$$

onde $H(\xi) = e^{\xi x}$. Segundo Churchill [7]

$$\mathbf{F}_c \left\{ \frac{2}{\pi} \frac{c}{c^2 + y^2} \right\} = e^{-c\xi}; \quad c > 0. \tag{3.72}$$

Logo,

$$\mathbf{F}_c \left\{ \frac{2}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right\} = e^{-x\xi} = H(\xi); \quad x > 0, \tag{3.73}$$

onde

$$h(y) = \frac{2}{\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)}. \tag{3.74}$$

Aplicando o teorema da convolução para F_c na equação (3.71) obtemos

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty g(\xi)[h(y + \xi) + h(y - \xi)] d\xi. \tag{3.75}$$

Das equações (3.74) e (3.75) tem-se a solução formal da equação de Laplace com as condições dadas em (3.64) por

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty g(\xi) \left[\frac{x}{x^2 + (y + \xi)^2} + \frac{x}{x^2 + (y - \xi)^2} \right] d\xi. \tag{3.76}$$

Dependendo da função $g(\xi)$, a solução dada pela equação (3.75) é verificável. A integral imprópria do termo em colchetes da equação (3.76) pode ser obtida por antiderivação em um intervalo finito, portanto se $g(\xi)$ for constante nesse intervalo e zero fora dele, como uma função Heaviside, soluções explícitas da equação (3.76) são obtidas. Esse artifício foi utilizado por Churchill [7] para resolver a equação de Laplace representando uma distribuição de temperaturas estacionárias em um quadrante usando as condições dadas pela equação (3.65). Vamos admitir que a condição de Dirichlet da equação (3.64) seja dada na forma

$$u(0, y) = \begin{cases} g(y) = a, & 0 < y < c \\ 0, & y > c, \end{cases} \tag{3.77}$$

onde a é uma constante real positiva. Das equações (3.76) e (3.77) tem-se

$$u(x, y) = \frac{a}{2} \int_0^c \left[\frac{x}{x^2 + (y + \xi)^2} + \frac{x}{x^2 + (y - \xi)^2} \right] d\xi. \tag{3.78}$$

A equação (3.78) resolvida dá a solução verificável

$$u(x, y) = \frac{a}{2} \left[\arctg \left(\frac{c - y}{x} \right) + \left(\frac{c + y}{x} \right) \right]. \tag{3.79}$$

Da equação (3.79) obtemos

$$u_x(x, y) = -\frac{2}{\pi} \frac{ac(c^2 - y^2 + x^2)}{(c^2 + x^2 - 2cy + y^2)(c^2 + x^2 + 2cy + y^2)} \tag{3.80}$$

e

$$u_y(x, y) = \frac{4}{\pi} \frac{acxy}{(c^2 + x^2 - 2cy + y^2)(c^2 + x^2 + 2cy + y^2)}. \tag{3.81}$$

Das equações (3.80) e (3.81) e das equações de Cauchy-Riemann temos a função de escoamento dada por

$$v(x, y) = \frac{a}{2\pi} \ln \left(\frac{c^2 + x^2 - 2cy + y^2}{c^2 + x^2 + 2cy + y^2} \right). \tag{3.82}$$

Do conjugado de $\frac{d\psi}{dz}$ tem-se o campo de velocidade do escoamento $\vec{V}(x, y)$ dado por

$$\vec{V}(x, y) = \frac{-2ac}{\pi(x^2 + (y - c)^2)(x^2 + (y + c)^2)} [c^2 - y^2 + x^2, -2xy]. \tag{3.83}$$

A velocidade escalar do campo do escoamento de calor é obtida das equação (3.80) e (3.81) por

$$V = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}. \tag{3.84}$$

As isotermas de temperaturas, $u(x, y) = c_1$ são circunferências com centro no eixo x de coordenadas $(\frac{c_1}{k_1}, 0)$ e raio $r_1 = \frac{c_1}{k_1}(k_1^2 + 1)^{1/2}$, onde $k_1 = tg \frac{\pi c_1}{a}$, com $c_1 \neq a(k + \frac{1}{2})$; $k \in \mathbb{Z}$.

De fato, aplicando a tangente na equação (3.79) e igualando à constante c_1 tem-se as equações das isotermas dadas por

$$\left(x - \frac{c_1}{k_1}\right)^2 + y^2 = \frac{c_1^2}{k_1^2}(k_1^2 + 1). \tag{3.85}$$

As linhas de escoamento, $v(x, y) = c_2$, com c_2 constante são também circunferências dadas por

$$x^2 + (y - k_2)^2 = k_2^2 - c_2^2, \tag{3.86}$$

com centro no eixo y dado por $(0, k_2)$ e raio $(k_2^2 - c_2^2)^{1/2}$, onde $k_2 = c_2 \left(\frac{1+r}{1-r}\right)$ e $r = e^{\frac{2\pi c_2}{a}}$. A Fig.(7) mostra o perfil de isotermas de temperaturas e das linhas de escoamento em uma sub-região próxima à origem para o caso $a = 1, b = 5$ e $c = 1$ do exemplo 2. A Fig.(8) mostra o campo de velocidade em uma sub-região próxima a origem do exemplo 2.

Exemplo 3:

Nesse exemplo, o domínio da região Ω onde a equação de Laplace (1.1) foi alterado e a fronteira têm as condições de Dirichlet dadas por

$$u(x, L) = f(x) = 0; x > 0 \quad u(x, 0) = \frac{a}{x}; x > 0 \quad e \quad u(0, y) = 0; y < L, \tag{3.87}$$

onde a é uma constante positiva. Além disso, $u(x, y) \rightarrow 0; x \rightarrow \infty, 0 < y < L$. Essa aplicação é baseada no exemplo dado por Debnath e Bhatta, onde eles consideram $u(x, 0) = f(x)$ [10]. Nosso objetivo foi mostrar a limitação do uso da transformada de Fourier em seno para regiões do plano, onde uma das extensões x ou y é finita. Aplicando a transformada de Fourier em seno, \mathbf{F}_s com respeito a variável x na equação (1.1) obtemos a equação diferencial linear ordinária homogênea de segunda ordem na variável y para cada $\xi > 0$ fixado dada por

$$\frac{d^2U(\xi, y)}{dy^2} - \xi^2 U(\xi, y) = 0. \tag{3.88}$$

Com as condições de Dirichlet dadas por

$$U(\xi, L) = \mathbf{F}_s\{u(x, L)\} = 0, \tag{3.89}$$

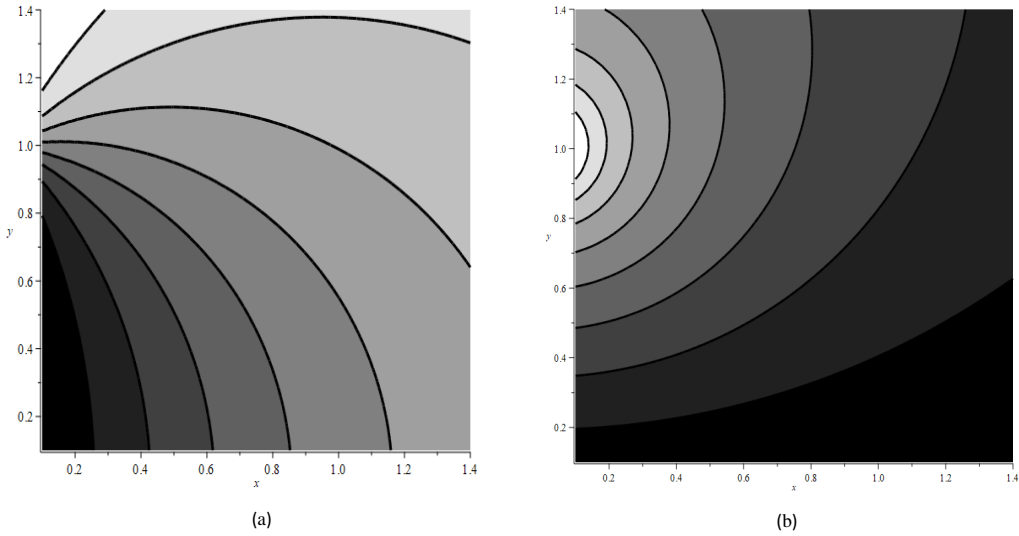


Figura 7: (a) Linhas isotermas de temperaturas e (b) linhas de escoamento do exemplo 2.

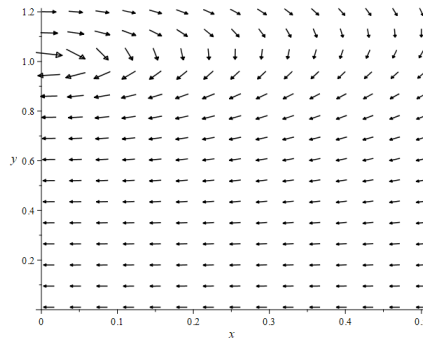


Figura 8: Campo de velocidade $\vec{V}(x, y)$ em $\tilde{\Omega}$

e

$$U(\xi, 0) = \mathbf{F}_s\{u(x, 0)\} = F(\xi). \tag{3.90}$$

A solução geral da equação (3.88) tem a forma

$$U(\xi, y) = c_1 e^{-\xi y} + c_2 e^{\xi y}. \tag{3.91}$$

Das equações (3.89) e (3.91) resulta

$$U(\xi, y) = F(\xi) \left[\frac{-e^{\xi(L-y)}}{e^{\xi L} - e^{-\xi L}} + \frac{e^{-\xi(L-y)}}{e^{\xi L} - e^{-\xi L}} \right], \tag{3.92}$$

ou ainda,

$$U(\xi, y) = F(\xi) \frac{\text{senh}[\xi(L-y)]}{\text{senh}(\xi L)}. \tag{3.93}$$

Desde que $F(\xi) = \mathbf{F}_s \left\{ \frac{a}{x} \right\} = \frac{a\pi}{2}$, a equação (3.93) pode ser posta na forma

$$U(\xi, y) = \frac{a\pi}{2} \frac{\text{senh}[\xi(L-y)]}{\text{senh}(\xi L)}. \tag{3.94}$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier em seno na variável x , \mathbf{F}_s^{-1} na equação (3.94) tem-se a solução formal dada por

$$u(x, y) = a \int_0^\infty \frac{\text{senh}[\xi(L-y)]}{\text{senh}(\xi L)} \text{sen}(\xi x) d\xi. \tag{3.95}$$

A equação (3.95), apesar da simplificação obtida por meio da condição $u(x, 0) = \frac{a}{x}; x > 0$, não pode ser explicitamente calculada da integral imprópria. Entretanto, para grandes valores de L pode ser considerada a seguinte solução explícita,

$$\frac{\text{senh}[\xi(L-y)]}{\text{senh}(\xi L)} = \frac{e^{\xi L} e^{-\xi y} - e^{-\xi L} e^{\xi y}}{e^{\xi L} - e^{-\xi L}}. \tag{3.96}$$

Quando L tende ao infinito na equação (3.95) tem-se

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{senh}[\xi(L-y)]}{\text{senh}(\xi L)} = e^{-\xi y}. \tag{3.97}$$

Assim, para grandes valores de L podemos escrever de modo aproximado que

$$u(x, y) \approx a \int_0^\infty e^{\xi y} \text{sen}(\xi x) d\xi = a \frac{x}{x^2 + y^2}. \tag{3.98}$$

A equação (3.98) satisfaz a equação de Laplace e as condições de fronteira dadas pela equação (3.87). No limite $L \rightarrow \infty$ o problema dado seria um caso particular do caso 2 fazendo $b = 0$.

4 CONCLUSÕES

Alguns exemplos de distribuição de temperaturas em regime estacionário em uma placa homogênea delgada bidimensional paralela ao plano xy na região do primeiro quadrante representados pela equação de Laplace e com condições de Dirichlet e Neumann foram resolvidos utilizando a transformada de Fourier em seno e cosseno. A obtenção de cada solução analítica tornou possível o cálculo da respectiva harmônica conjugada. Essas funções foram então combinadas para obter o campo de velocidade de cada escoamento de calor, as isotermas de temperaturas e as linhas de escoamento. Foi obtida uma relação adimensional entre a magnitude do vórtice livre do escoamento e a condição de Dirichlet especificada na fronteira de calor em um dos exemplos analisados. Um exemplo, em particular, foi incluído para mostrar a limitação do uso do método utilizado nesse estudo para a obtenção de soluções explícitas para a equação de Laplace.

ABSTRACT. In this paper the Laplace equation was used to represent a distribution of stationary temperatures in the first quadrant in the Cartesian plane with different boundary conditions, having been examined in detail, the light of the sine and cosine Fourier transform. After obtaining the formal solution for each example, it was possible, using the Cauchy-Riemann equations to obtain each field of heat flow. In one of the examples analyzed, the velocity field of the flow is in the form of a free vortex with center at the origin, and an dimensionless relationship between the vortex magnitude and the Dirichlet condition imposed at the boundary has been established. An example, in particular, was included to show the limitation of the this method to obtain explicit solutions for the Laplace equation

Keywords: Laplace Equation, isotherms, flow line, temperature distribution, intensity of free vortex.

REFERÊNCIAS

- [1] J.C. Araújo, R.G. Márquez & Y.A.R. Huaroto. “Equações diferenciais ordinárias: teoria básica e aplicações com o uso do Maple”. Ed. Clube de Autores, Joinville (2016).
- [2] J.C. Araújo & R.G. Márquez. Transformadas de Fourier em seno e cosseno: aplicações no cálculo integral e na equação de Laplace. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, **11**, 136–154.
- [3] W.E. Boyce & R.C. DiPrima. “Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno”. LTC, Rio de Janeiro, 6 ed. (1999).
- [4] K.W. Brown & R.V. Churchill. “Variáveis Complexas e Aplicações”. McGraw Hill Education, 9 ed. (2015).
- [5] H.S. Carslaw & J.C. Jaeger. “Conduction of Heat in Solids”. Clarendon Press-Oxford, 2 ed. (2011).
- [6] A.S. Castro. Estados ligados em um potencial delta duplo via transformadas seno e cosseno de Fourier. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **36**(2) (2014), 1–5.
- [7] R.V. Churchill. “Fourier series and boundary value problems”. McGraw-Hill Kogakusha, LTD, 2 ed. (1963).
- [8] R.V. Churchill. “Operational mathematics”. McGraw-Hill, New York, 3 ed. (1972), 337 pp.
- [9] J. Crank. “The mathematics of diffusion”. Clarendon Press, Oxford, second ed. (2011), 414 pp.
- [10] L. Debnath & D. Bhatta. “Integral transforms and their applications”. A Chapman & Hall Book, 3 ed. (2015), 700 pp.
- [11] R. Fox, P.J. Pritchard & A.T. McDonald. “Introdução à mecânica dos fluidos”. LTC, Rio de Janeiro, 3 ed. (2011).
- [12] V. Iório. “EDP Um Curso de Graduação. Coleção Matemática Universitária”. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ (1991).
- [13] N.T. Negero. Fourier transform methods for partial differential equations. *International Journal of Partial Differential Equations and Applications*, **2**(3) (2014), 44–57.
- [14] D.W. Trim. “Applied Partial Differential Equations”. PWS-KENT, Boston, MA (1990).

APÊNDICE

Neste apêndice são apresentadas a transformada de Fourier em seno e cosseno e duas de suas propriedades, bem como o teorema de Cauchy.

Teorema A.2. *Seja $f(x)$ uma função que é seccionalmente contínua sobre todo o intervalo finito no eixo x e que nos pontos de descontinuidade, x_0 , é definida como $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$ e que seja absolutamente integrável. Então em todo ponto x onde $f(x)$ é derivável, a função $f(x)$ é representada pela fórmula integral de Fourier [4], para todo x real,*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos(\alpha(\xi - x)) d\xi d\alpha. \tag{A.1}$$

Usando a identidade trigonométrica relativa ao $\cos(\alpha\xi - \alpha x) = \cos(\alpha\xi)\cos(\alpha x) + \text{sen}(\alpha\xi)\text{sen}(\alpha x)$ a equação (A.1) pode ser reescrita como

$$f(x) = \int_0^\infty (A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\text{sen}(\alpha x)) d\alpha, \tag{A.2}$$

onde

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos(\alpha\xi) d\xi \tag{A.3}$$

e

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \text{sen}(\alpha\xi) d\xi. \tag{A.4}$$

Suponhamos que $f(x)$ é uma função ímpar. Daí, $f(\xi)\cos(\alpha\xi)$ é uma função ímpar e, portanto $A(\alpha) = 0$, enquanto $f(\xi)\text{sen}(\alpha\xi)$ é uma função par, então

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \text{sen}(\alpha\xi) d\xi. \tag{A.5}$$

Das equações (A.2) e (A.5) a expressão de $f(x)$ em termos dos coeficientes de Fourier $B(\alpha)$ em senos é dada por

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{sen}(\alpha x) \left(\int_0^\infty f(\xi) \text{sen}(\alpha\xi) d\xi \right) d\alpha. \tag{A.6}$$

Considerando $f(x)$ com as hipóteses do Teorema A.2 e pela equação (A.6) a transformada de Fourier em seno, $F_s(x)$, da função $f(x)$ é dada por

$$F_s(\alpha) = \int_0^\infty f(\xi) \text{sen}(\alpha\xi) d\xi. \tag{A.7}$$

Enquanto sua fórmula de inversão, $F^{-1}\{F_s(\alpha)\} = f(x)$ é dada utilizando as equações (A.6) e (A.7) por

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_s(\alpha) \text{sen}(\alpha x) d\alpha. \tag{A.8}$$

Note que a equação (A.6) é a representação integral de Fourier em seno de $f(x)$. Tal tipo de equação é denominado equação integral singular por tratar-se de uma integral imprópria [4]. Pode-se observar, que pelo menos teoricamente, a função incógnita dessa equação pode ser calculada pela equação (A.7). A seguir, será dado um lema que, sob certas condições, condições estas, diga-se de passagem, plausíveis em aplicações

físicas, permite que essa função incógnita seja calculada por meio de uma equação algébrica, em vez do uso direto da equação (A.7).

Lema A.1. *Sejam f e g funções integráveis. A transformada de Fourier em seno é linear, isto é,*

$$F_s\{af(x) + bg(x)\} = a F_s\{f(x)\} + b F_s\{g(x)\}, \quad (\text{A.9})$$

onde a e b são duas constantes reais arbitrárias.

Lema A.2. *Suponhamos que f , f' e f'' são funções contínuas para $x \geq 0$ e que f, f' tendem a zero, quando x tende ao infinito. Se, além disso, f é absolutamente integrável, isto é, $\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$, então*

$$F_s\{f''\}(\alpha) = -\alpha^2 F_s(\alpha) + \alpha f(0), \quad (\text{A.10})$$

onde o símbolo $F_s\{f\}(\alpha)$ tem o mesmo sentido de $F_s(\alpha)$.